

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт им. П.Н. Лебедева  
Российской академии наук

На правах рукописи  
УДК 532.517.45

Копьев Алексей Викторович

**Исследование статистических свойств тензора градиентов  
скорости в изотропном несжимаемом турбулентном  
потоке**

Специальность 01.04.02 —  
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
Зыбин Кирилл Петрович

Москва — 2018

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Исследование распределения тензора скоростей деформации</b> . . . . .	<b>16</b>
1.1 Вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности . . . . .	16
1.1.1 Оценка параметра симметрии . . . . .	17
1.2 Распределение тензора скоростей деформации в случае обратимой по времени статистики скорости . . . . .	19
1.2.1 Случай гауссового распределения . . . . .	20
1.3 Аппроксимация турбулентной статистики тензора скоростей деформации . . . . .	21
1.3.1 Лог-нормальность статистики . . . . .	21
<b>Глава 2. Линейная гауссова модель для динамики крупномасштабной завихренности</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1 Динамика крупномасштабной завихренности . . . . .	24
2.2 Затухание корреляторов на больших временах . . . . .	25
2.3 Тензор скоростей деформации в базисе своих собственных векторов . . . . .	27
2.4 Тензор скоростей деформации в базисе своих изначально собственных векторов . . . . .	29
2.5 Затухание усредненного тензора в базисе изначально собственных векторов . . . . .	31
2.6 Изотропизация корреляционного тензора в базисе изначально собственных векторов . . . . .	33
2.7 Линейная асимптотика корреляторов на малых временах . . . . .	35
2.8 Усреднение по начальным направлениям завихренности . . . . .	39
2.9 Сравнение с экспериментом . . . . .	40
<b>Глава 3. Корреляции скорости и градиентов скорости</b> . . . . .	<b>42</b>

3.1	Изотропный и несжимаемый двухточечный третий коррелятор скорости . . . . .	42
3.2	Смешанные двухточечные корреляторы и трехточечный коррелятор скорости . . . . .	45
3.3	Метод нахождения членов разложения трехточечного тензора . . . . .	48
3.3.1	Первое условие. Гладкий предельный переход. . . . .	48
3.3.2	Второе условие. Перестановочная симметрия . . . . .	49
3.3.3	Третье условие. Несжимаемость . . . . .	50
3.4	Первый порядок разложения для трехточечного тензора . . . . .	51
3.5	О нахождении новой скалярной функции из уравнений движения . . . . .	55
3.5.1	Динамика парного смешанного коррелятора . . . . .	55
3.5.2	Динамика парного коррелятора градиентов скорости . . . . .	57
3.6	Смешанные двухточечные корреляторы первого порядка в локально-изотропной турбулентности . . . . .	58
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>64</b>
	<b>Приложение А. Функции распределения различных инвариантов и соотношения между ними . . . . .</b>	<b>71</b>
A.1	Функция распределения собственных значений тензора . . . . .	71
A.2	Функция распределения следов степеней тензора . . . . .	72
A.3	Функция распределения введенных инвариантов . . . . .	72
A.4	Функции распределения нормированных собственных значений тензора . . . . .	73
	<b>Приложение Б. Вычисления для гауссовой статистики . . . . .</b>	<b>74</b>
	<b>Приложение В. Аппроксимация «JHTDB-распределения» . . . . .</b>	<b>77</b>

## Введение

Настоящая научно-квалификационная работа (НКР) посвящена теории изотропной турбулентности несжимаемой ньютоновской жидкости. Течение несжимаемой ньютоновской жидкости удовлетворяет уравнениям Навье-Стокса:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial r_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial r_j \partial r_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial r_i} = 0, \quad (2)$$

где  $v_i$  —  $i$ -ая компонента вектора скорости  $\mathbf{v}$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость, по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование. В дальнейшем принимаем  $\rho = 1$  без нарушения общности, поскольку жидкость несжимаема.

В 1883 году Осборн Рейнольдс в экспериментах по течению несжимаемой жидкости в трубах обнаружил резкое изменение режима течения при небольшом изменении скорости потока вблизи некоторого критического значения скорости [1]. При переходе через это критическое значение поток приобретал случайную хаотическую структуру. Проведя большое количество экспериментов, Рейнольдс обнаружил, что переход для разных параметров системы наблюдается при достижении критического значения безразмерного параметра, названного впоследствии числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{vL}{\nu}. \quad (3)$$

Здесь  $v$  — характерная скорость потока, а  $L$  — характерный масштаб в течении (поперечный размер трубы, например). Хаотический режим, возникающий при числах Рейнольдса больших критического, Рейнольдс назвал турбулентным, а устойчивый режим, наблюдаемый при меньших, — ламинарным.

В 1895 году Рейнольдс опубликовал работу, в которой попытался дать теоретический анализ работы 1883 года на основании уравнений динамики. Основным результатом новой работы [2] были уравнения осредненного турбулентного движения, называемые теперь уравнениями Рейнольдса. Принцип их получения состоял в следующем: подставив в уравнение Навье-Стокса скорость, разложенную с помощью некоторой процедуры на осредненную по

времени и пульсационную составляющие, и усреднив само уравнение по времени, получается уравнение для динамики осредненной составляющей. Причем уравнения для нее содержат парный корреляционный тензор пульсационной составляющей скорости, называемый тензором напряжений Рейнольдса. Таким образом, пульсационная компонента определяет осредненную компоненту посредством тензора напряжений Рейнольдса, поэтому полученная система уравнений оказывается незамкнутой. Если аналогичным образом попробовать написать уравнение динамики тензора напряжений Рейнольдса, то вследствие нелинейности уравнений динамики появятся статистические моменты еще более высокого порядка к которым добавляются также смешанные корреляции давления и скорости. В 1924 году Л.В. Келлер и А.А. Фридман предложили общий метод построения уравнений для моментов любого порядка и показали, что любая конечная подсистема бесконечной системы таких уравнений незамкнута [3]. Анализ и решение полной системы Келлера–Фридмана и есть нерешенная до сих пор проблема турбулентности.

В 1935 году Джеффри Тейлор показал, что наипростейший случай полной системы Келлера–Фридмана достигается в так называемой однородной и изотропной турбулентности, то есть в таком гипотетическом потоке, для которого все статистические моменты инвариантны относительно ортогональных преобразований [4]. Однородная и изотропная турбулентность оказалась значительно доступнее для математического анализа, хотя и сохранила в себе принципиальные проблемы невозможности локального замыкания. Более того, условия изотропной турбулентности достигаются только в очень малом числе потоков, фактически не представляющих практического интереса.

В 1941 году А.Н. Колмогоров развил далее идеи Тейлора, введя понятие локально изотропной турбулентности, то есть однородной по времени турбулентности, в которой однородны и изотропны распределения приращений скорости и давления. В основе колмогоровской теории турбулентности лежит предположение о существовании потока плотности энергии  $\epsilon$  в турбулентном потоке от пульсаций больших масштабов, где она «накачивается», к пульсациям меньших масштабов без потерь («инерционно») до тех пор, пока энергия, дойдя до самого маленького в течении «вязкого» масштаба  $\eta$  не рассеивается в тепло. Колмогоров заметил, что ввиду хаотичности процесса передачи энергии ориентирующее влияние среднего течения должно ослабляться на малых масштабах, поэтому он выдвинул гипотезу о том, что «в произвольном турбу-

лентном потоке с достаточно большим числом Рейнольдса в достаточно малых областях четырехмерного пространства, не лежащих вблизи границ потока, или других его особенностей осуществляется с хорошим приближением гипотеза локальной изотропности.» [5]. Справедливость этой гипотезы проверена в большом количестве экспериментальных работ (см., например, ссылки в [6, §16] или [7, глава 6]). На ее основании успешно проводятся современные компьютерные расчеты турбулентных течений методом крупных вихрей [8]. Таким образом, разработка теории изотропной турбулентности принципиально важна для решения конкретных астрофизических и прикладных задач.

В той же работе [5] Колмогоров сформулировал дополнительные гипотезы подобия, которые позволили из теории размерности вывести в инерционном интервале следующий закон «двух третей»:

$$\langle \delta v_L^2 \rangle \propto (\varepsilon b)^{2/3}. \quad (4)$$

Здесь  $\delta v_L$  – продольное приращение скорости между двумя точками на расстоянии  $b$ , а  $\langle \dots \rangle$  – усреднение по ансамблю. Естественным обобщением этого закона является утверждение о так называемом колмогоровском скейлинге (см., например, [7, глава 8]):

$$\langle \delta v_L^n \rangle \propto (\varepsilon b)^{\zeta_n}, \quad (5)$$

где  $\zeta_n = n/3$ . Для  $n = 3$  это утверждение было доказано Колмогоровым точно в [9], где он вычислил из уравнений динамики третий продольный коррелятор (закон «четырёх пятых»):

$$\langle \delta v_L^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon b. \quad (6)$$

Анселмет с соавторами экспериментально обнаружили в 1984 году, что для  $n \neq 3$  колмогоровский скейлинг не выполняется [10]: для  $n < 3$  показатель степени  $\zeta_n$  несколько выше, а для  $n > 3$  – ниже колмогоровского  $n/3$ . Таким образом можно сказать, что  $\zeta_n$  есть выпуклая кверху функция  $n$ . Это явление было названо впоследствии аномальным скейлингом, оно напрямую связано с явлением внутренней перемежаемости, то есть с негауссовостью статистики поля скорости (см. [7, глава 8] или [11, глава 1]). Тогда же для объяснения этого явления рядом авторов была предложена так называемая мультифрактальная

модель [12; 13]. Эта модель является, как и теория Колмогорова, феноменологической, то есть основывается на размерных соображениях.

К.П. Зыбиным, В.А. Сиротой, А.С. Ильиным и А.В. Гуревичем в цикле работ 2007 — 2015 годов была предложена и разработана модель, названная ими моделью вытягивающихся вихрей, в основе которой лежат уравнения динамики жидкости [14—18]. Эта модель придает конкретный физический смысл мультифрактальной теории. Суть модели заключается в выделении в потоке вытягивающихся интенсивных вихревых структур — филаментов — свойства которых, с одной стороны, могут быть выведены из уравнений динамики, а с другой стороны, определяют статистические характеристики турбулентного потока. Аналитическое рассмотрение таких структур становится возможным ввиду предложенного и обоснованного в представленных работах линейного механизма экспоненциального вытягивания этих структур. Определяющая статистическая значимость в турбулентном потоке именно редких интенсивных вихревых структур указывалась многими авторами [7; 11], на их возможное наличие и роль указывал еще в 1937 году Тейлор [19], оно было косвенно показано в экспериментальной работе Бэтчелора и Таунсенда 1949 года [20], а затем непосредственно обнаружено в 1993 году в расчетах Хименеза и соавторов [21]. Влияние этих структур конкретно на аномальный скейлинг ярко проиллюстрировано в экспериментальной работе 2009 года Холмянского и Цинобера [22]: оказывается, что отбрасывание из статистического рассмотрения интенсивных вихревых структур приводит к «выравниванию» аномального скейлинга, то есть показатель степени  $\zeta_n$  при больших  $n$  начинает «подниматься» к  $n/3$ .

Другое направление исследований, инициированное Колмогоровым, состоит в нахождении точных законов турбулентности помимо закона четырех пятых (6). Точных в том смысле, что для их вывода требуется только выполнение уравнений Навье-Стокса (1), (2) и самых общих гипотез (например, существования конечного ненулевого значения  $\varepsilon$ ). В изотропной турбулентности на этом пути удастся сделать не так много: можно привести в пример аналог закона четырех пятых для пассивного скаляра, выведенный Ягломом в 1949 году [23], а также результат Новикова 1965 года, где найдена крупномасштабная поправка к закону в стационарном случае с накачкой энергии гауссовой случайной силой [24]. Существует множество обобщений закона четырех пятых на случай более сложных течений. Например, в работах [25—27] приводятся различные обобщения закона на случай однородных, но необязательно изотропных

течений, в работах [28–30] — на случай магнитогидродинамической турбулентности, в работах [31; 32] — на случай отсутствия отражательной симметрии, а в работах [33–37] — на случай турбулентности сжимаемого газа. Таким образом, все точные законы существенным образом опираются на закон четырех пятых. Принципиальным моментом в выводе этого закона является «выпадение» давления, нелокально зависящего от скорости, из уравнения на динамику парного коррелятора, показанное Карманом и Ховартом в 1938 году [38]. В остальные уравнения цепочки Келлера-Фридмана нелокальный смешанный коррелятор скоростей и давления входит даже в самом простом случае изотропной турбулентности, что, по-видимому, является главной трудностью теории.

Знание таких точных законов, определяющих статистику поля скорости очень важно для аналитического рассмотрения задач турбулентного транспорта. Такими задачами являются задачи о транспорте пассивного скаляра (например, примеси или температуры) и пассивного вектора (например, магнитного поля) турбулентным полем скорости. Однако существенной проблемой на сегодняшний день является не только отсутствие аналитических результатов о высших корреляторах поля скорости, но и отсутствие универсальной техники, позволяющей работать с негауссовой статистикой. Таким образом, в значительной части работ, посвященных данной проблеме, вычисления выполняются в гауссовом случае, причем считается, что качественно результаты от статистики не зависят (см. обзор [39]). В цикле работ А.С. Ильина, В.А. Сироты и К.П. Зыбина 2016 — 2018 годов развивается техника, позволяющая находить мелкомасштабные корреляции пассивного скаляра или вектора для произвольной статистики поля скорости [40–42]. В этих работах выявлена существенная роль асимметрии статистики скорости в вопросах генерации (динамо) пассивного вектора. Таким образом, поскольку асимметрия гауссового поля равна нулю, негауссовость реального поля скорости может оказаться существенной в этих вопросах. Например, в гауссовой модели кинематического динамо Казанцева-Крайчнана [43; 44] крупномасштабное динамо отсутствует [43; 45], что может быть проявлением отсутствия асимметрии у гауссового поля скорости.

**Целью** данной работы является развитие идеи линейного механизма вытягивания в теории турбулентности в рамках построения линейной стохастической модели для жидких частиц из инерционного интервала (главы 1 и 2) и вычисление корреляторов поля скорости необходимых для учета статистической асимметрии в задачах турбулентного транспорта (глава 3).



Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Аналитически исследовать статистику тензора скоростей деформации в изотропном потоке с гауссовой статистикой скорости.
2. Исследовать статистику тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке путем статистического анализа данных численной симуляции изотропной турбулентности.
3. Детально разработать модель, пригодную для описания раскручивания жидких частиц из инерционного интервала.
4. В рамках модели вывести кинетическое уравнение на величину, измеренную ранее в экспериментальных работах.
5. Сравнить результаты эксперимента и модели.
6. Разработать метод вычисления членов разложения трехточечного коррелятора скорости в изотропной турбулентности.
7. Вычислить нетривиальные смешанные корреляторы в локально изотропной турбулентности.
8. Дополнить результаты аналитических расчетов с помощью численных симуляций изотропной турбулентности.

**Научная новизна:**

1. Впервые получено вырождение функции распределения тензора скоростей деформации путем удачного выбора измеряемых.
2. Было выполнено оригинальное теоретическое исследование эффекта рааскручивания жидких частиц из инерционного интервала.
3. Впервые получены аналитические выражения для смешанных корреляторов скорости и градиента скорости.

**Практическая значимость.** Поскольку в произвольном развитом турбулентном потоке вдали от стенок мелкомасштабные возмущения имеют универсальную локально-изотропную структуру результаты НКР могут быть использованы, например, для формулировки моделей подсеточной турбулентности в вычислительной гидродинамике и для решения астрофизических задач с турбулентной средой.

**Методология и методы исследования.** Применяются аналитические и символьные расчеты, а также статистическая обработка данных симуляций изотропной турбулентности.

### Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численно обнаружено вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке. Аналитически показано, что наличие вырождения означает универсальность функции распределения отношения собственных значений тензора.
2. Найдена лог-нормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора скоростей деформации. При этом оба параметра определяются отдельно. Произведено численное определение параметров аппроксимации.
3. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. Показано, что линейные эффекты, возможно, играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
4. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода сильно ограничено количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть первые два члена разложения трехточечного тензора по расстоянию между двумя точками - до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции определяются численно.
5. На основании сравнения численных данных двух различных симуляций изотропного турбулентного потока обнаружено, что одна из определенных аналитически скалярная функция является универсальной константой, зависящей только от плотности потока энергии  $\epsilon$ .

**Достоверность** полученных теоретических результатов обеспечивается их сравнением с экспериментальными и численными данными. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами. Численные результаты получались с использованием **современных симуляций** и согласуются с полученными ранее.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на астрофизических семинарах ОТФ ФИАН, на семинаре по механике многофазных сред НИИ механики МГУ, на различных сессиях и конференциях:

1. XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 18-19 декабря 2017 г.)

2. XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 25 февраля – 4 марта 2018 г.)
3. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, 4-14 сентября 2018 г.)
4. 60-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 г.)
5. 59-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 21-26 ноября 2016 г.)
6. 55-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 19-25 ноября 2012 г.)

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в решении поставленных ему задач. Проводил аналитические выкладки, формулировал промежуточные модели и выполнял статистическую обработку данных численных симуляций.

**Публикации.** Основные результаты по теме НКР изложены в 6 печатных изданиях [46–51], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [46–48], 3 — в тезисах докладов [49–51].

**Объем и структура работы.** НКР состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём НКР составляет 79 страниц, включая 13 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 83 наименования.

В главе настоящей НКР линейный механизм модели вытягивающихся вихрей используется для формулировки стохастической модели раскручивания жидких частиц из инерционного интервала. Экспериментально и численно явление раскручивания было исследовано в работах [52; 53]. Рассмотрим содержание эффекта, названного авторами «пируэт-эффектом», более подробно. Введем обозначение для завихренности – ротора скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  потока:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

В эксперименте и численном расчете [52; 53], исследовалась жидкая частица, ограниченная тетраэдром, в вершинах которого находились 4 пробные частицы. Измеряя скорости частиц в вершине тетраэдра, можно аппроксимировать завихренность течения согласно, так называемой, минимальной модели

[54]. Для жидких частиц из вязкого (колмогоровского) интервала эта модель дает обычное значение завихренности в точке, где находится эта жидкая частица. Для жидких частиц из инерционного интервала, завихренность значительно меняется в жидкой частице от точки к точке, и модель дает эффективную, «крупномасштабную», завихренность  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , направление которой будем отсчитывать по отношению к собственным векторам крупномасштабного тензора скоростей деформации  $S_{ij}(t)$ , найденного с помощью той же минимальной модели из

$$S_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j(\mathbf{r}, t) + \partial_j v_i(\mathbf{r}, t)) \quad (8)$$

где  $\partial_i = \partial/\partial r_i$  – частная производная по  $i$ -ой координате. Движение жидкой частицы колмогоровского масштаба можно разложить на вращение вокруг вектора завихренности и деформацию вдоль собственных векторов тензора скоростей деформации [55]. Для частицы из инерционного интервала найденные из минимальной модели крупномасштабные завихренность и тензор скоростей деформации качественно также отвечают этому разложению. В силу несжимаемости среди трех собственных векторов тензора скоростей деформации обязательно найдется тот, вдоль направления которого частица испытывает растяжение (с максимальным собственным числом), тот, вдоль которого она испытывает сжатие (с минимальным собственным числом) и промежуточный, вдоль которого может быть, как сжатие, так и растяжение. Следуя обозначениям статей [52; 53], в нулевой момент времени назовем вектор  $\mathbf{e}_1(0)$  вектором доминирующего растяжения, вектор  $\mathbf{e}_2(0)$  – промежуточным, а  $\mathbf{e}_3(0)$  – вектором доминирующего сжатия.

Эксперимент и расчет [52] показали, что на малых временах в типичной реализации эксперимента наблюдается уменьшение угла между векторами  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{e}_1(0)$ . Это означает рост со временем величины  $\alpha_t^2$  – усредненного по ансамблю реализаций в эксперименте квадрата косинуса угла между векторами  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{e}_1(0)$ :

$$\alpha_t^2 = \left\langle \left( \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}, \mathbf{e}_1(0) \right)^2 \right\rangle \quad (9)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по ансамблю реализаций событий в эксперименте, а круглыми – скалярное произведение векторов. В данном случае имеется в виду произведение единичных векторов, направленных

вдоль завихренности  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и вектора доминирующего растяжения  $\mathbf{e}_1(0)$ . Явление увеличения  $\alpha_t^2$  на малых временах (по аналогии с эффектом увеличения угловой скорости у фигуриста, делающего пируэт вдоль оси, момент инерции относительно которой он уменьшает) и было названо пируэт-эффектом. Следует отметить, что качественно этот эффект является следствием теоремы Гельмгольца [55; 56], однако для количественных оценок  $\alpha_t^2$ , полученных в НКР, требуется более детальное рассмотрение динамики системы. В работе [53] были определены зависимости от времени квадрата косинуса углов между  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{e}_2(0)$  и между  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{e}_3(0)$ :

$$\beta_t^2 = \left\langle \left( \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}, \mathbf{e}_2(0) \right)^2 \right\rangle \quad (10)$$

$$\gamma_t^2 = \left\langle \left( \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{|\boldsymbol{\omega}(t)|}, \mathbf{e}_3(0) \right)^2 \right\rangle \quad (11)$$

В работах [52; 53] приведены различные качественные соображения, объясняющие пируэт-эффект, а в [57] эффект объясняется путем моделирования динамики тензора градиентов скорости. В этих работах главное внимание уделяется нелинейности в динамике жидкости. Результаты НКР показывают, что этот эффект может быть объяснен в рамках построенной в работе линейной модели. В разделе 2.1 выведено уравнение динамики крупномасштабной завихренности:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}(t)}{dt} = \mathbf{S}(t)\boldsymbol{\omega}(\rho, t) \quad (12)$$

Основная идея развиваемого в НКР подхода состоит в том, что крупномасштабные завихренность и тензор скоростей деформации считаются статистически независимыми. Основаниями для такого предположения являются следующие результаты:

1. В работе Зыбина и др. [14] показано отсутствие самодействия вихря, то есть несущественность влияния мелкомасштабных пульсаций, создаваемых самим вихрем, на динамику его завихренности.
2. В работах Гамлингтона и др. [58; 59] численно показано, что крупномасштабные пульсации воздействуют на вихревую структуру линейно, то есть не испытывая обратного влияния. Физически это можно объяснить наличием потока энергии с больших масштабов в меньшие. Таким образом динамика больших масштабов определяет динамику меньших

и, напротив, динамика малых масштабов незначительно сказывается на динамике больших.

3. Как показывают расчеты Хименеза и др. [21], для относительно малых жидких частиц крупномасштабная завихренность  $\omega(t)$  определяется наиболее интенсивной вихревой структурой внутри жидкой частицы. Поэтому мелкомасштабные пульсации, создаваемые этой вихревой структурой внутри жидкой частицы, не влияют и на крупномасштабную завихренность  $\omega(t)$  всей частицы, а крупномасштабные пульсации воздействуют на нее линейно.

Таким образом крупномасштабный тензор скоростей деформации является внешним источником для динамики крупномасштабной завихренности. Поэтому в производится предварительное исследование статистических свойств тензора скоростей деформации в процессе которого удастся получить несколько самостоятельных результатов. В большинстве исследований, посвященных изучению тензора, его статистические свойства исследуются через его инварианты вращения, то есть такие комбинации, которые инвариантны относительно ортогональных преобразований (например, [53; 60–71]). В качестве таких инвариантов могут быть выбраны собственные значения тензора [67–69] или следы его степеней [66–70]:

$$P_S = -\text{Tr}(\mathbf{S}) \equiv 0, \quad (13)$$

$$Q_S = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{S}^2), \quad (14)$$

$$R_S = -\frac{1}{3}\text{Tr}(\mathbf{S}^3), \quad (15)$$

где инвариант  $P_S$  равен нулю из-за несжимаемости. Следы более высоких степеней выражаются через  $P_S$ ,  $Q_S$  и  $R_S$ . В изотропной турбулентности статистика двух независимых инвариантов вращения полностью определяют статистику всего тензора [60; 72].

Существуют также одиночные инварианты, статистика которых содержит в себе неполную информацию о статистике тензора. Например, можно рассмотреть так называемые нормированные собственные значения  $s$  или  $\beta$ :

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}}, \quad (16)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{6}\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \quad (17)$$

Их значения однозначно определяют отношения собственных значений, но не дают абсолютных значений собственных значений. Их статистика численно и экспериментально исследована в большом количестве работ [53; 61—65; 67; 71]. В работе Ланда и Роджерса [63] статистика этих инвариантов численно исследована для случая гауссового распределения скоростей.

# Глава 1. Исследование распределения тензора скоростей деформации

## 1.1 Вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности

Можно ввести следующие независимые инварианты вращения:

$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S, \quad (1.1)$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S. \quad (1.2)$$

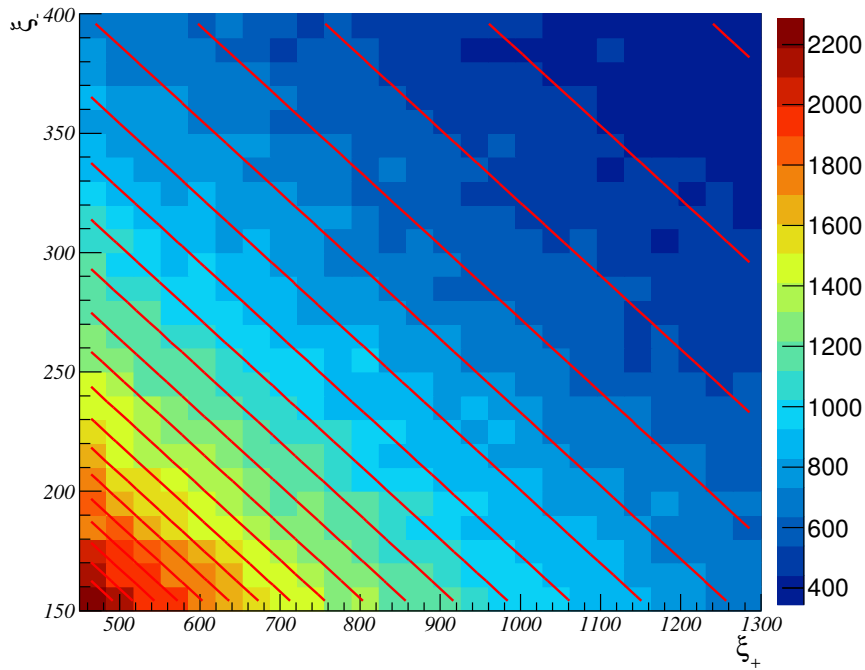


Рисунок 1.1 — Гистограмма инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$  в «JHTDB-распределении» (т.е. построенная по базе данных университета Джона Хопкинса). Красные линии отражают симметрию. Масштабы горизонтальной и вертикальной осей различные, то есть линии симметрии скошены к горизонтали.

На рисунке 1.1 построена гистограмма совместных значений  $\xi_+$  и  $\xi_-$  по результатам численной симуляции изотропного турбулентного потока универси-



тета Джона Хопкинса [73; 74]<sup>1</sup>. Видно, что распределение инвариантов является квазиодномерным, то есть зависит от их линейной комбинации:

$$\xi_a = \frac{1+a}{2}\xi_+ + \frac{1-a}{2}\xi_-, \quad (1.3)$$

где  $a \sim -0.6 \div -0.5$  — фиксированный параметр симметрии. Таким образом функция распределения  $\xi_+$  и  $\xi_-$  оказывается вырожденной в «JHTDB-распределении» (здесь и далее будем называть статистику построенную по численным симуляциям университета Джона Хопкинса «JHTDB-распределением»). Инвариант  $\xi_a$ , введенный в (1.3) будет полезен в дальнейшем рассмотрении. Он может быть выражен также через инварианты  $Q_S$  и  $R_S$ :

$$\xi_a = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}a}{2}R_S. \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Оценка параметра симметрии

Во введении уже вводились нормированные собственные значения  $\beta$  и  $s$  [61; 62]:

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}}, \quad (1.5)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{6}\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  — собственные значения тензора скоростей деформации в убывающем порядке. Значения  $s$  и  $\beta$  лежат на отрезке  $[-1; 1]$ . Оказывается, что наличие вырождения однозначно определяет форму функций распределения  $s$  и  $\beta$ , которые в этом случае зависят только от параметра симметрии  $a$ , а не от конкретной формы распределения. Это позволяет определить параметр  $s$  хорошей точностью.

---

<sup>1</sup>Поскольку расчеты производятся в пространстве волновых векторов, условие несжимаемости при обратном преобразовании Фурье немного нарушается. Поэтому при расчете значений инвариантов  $S_{33}$  берется равным  $-S_{11} - S_{22}$

Для того, чтобы показать это для функции распределения  $s$  применим обнаруженную симметрию с точными соотношениями, представленными в приложении А. Представим симметрию в виде:

$$f_{\xi_+, \xi_-}(x_+, x_-) = f\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right), \quad (1.7)$$

где  $x_+$  и  $x_-$  аргументы функции распределения, а  $f$  некоторая одномерная функция. Используя (А.8), имеем:

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} f\left((-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} ar\right), \quad (1.8)$$

где  $q$  и  $r$  аргументы функции распределения  $Q_S$  и  $R_S$ , обозначенную  $f_{Q_S R_S}$ . Подстановка (1.8) в (А.10) приводит к следующему выражению для функции распределения  $s$ :

$$f_s(z) = 6 \cdot \int_0^{+\infty} f(t^3(1+az)) t^5 dt, \quad (1.9)$$

где  $z \in [-1; 1]$  — аргумент функции распределения. Домножение переменной интегрирования  $t$  на  $\sqrt[3]{1+az}$  с последующей заменой приводит к универсальности функции распределения  $s$ :

$$f_s(z) \propto \frac{1}{(1+az)^2}. \quad (1.10)$$

Нормировка  $f_s$  окончательно приводит к:

$$f_s(z) = \frac{(1-a^2)}{2(1+az)^2}. \quad (1.11)$$

Аналогично получаем универсальность функции распределения  $\beta$ :

$$f_\beta(z) = \frac{3}{4}(1-z^2) \frac{(1-a^2)}{\left(1 + \frac{a}{2}z(3-z^2)\right)^2}. \quad (1.12)$$

Для нахождения параметра симметрии  $a$ , соотношение (1.11) можно переписать в более удобном для обработки виде:

$$\sqrt{\frac{1}{f_s(z)}} = \sqrt{\frac{2}{1-a^2}} (1+az). \quad (1.13)$$

Таким образом  $f_s^{-1/2}$  линейно зависит от  $z$ . Для «JHTDB-распределения» это подтверждается рисунком 1.2. Применяя метод наименьших квадратов, определяем  $a$  для «JHTDB-распределения»:

$$a \simeq -0.53. \quad (1.14)$$

Найденная линейная аппроксимация также изображена на рисунке 1.2.

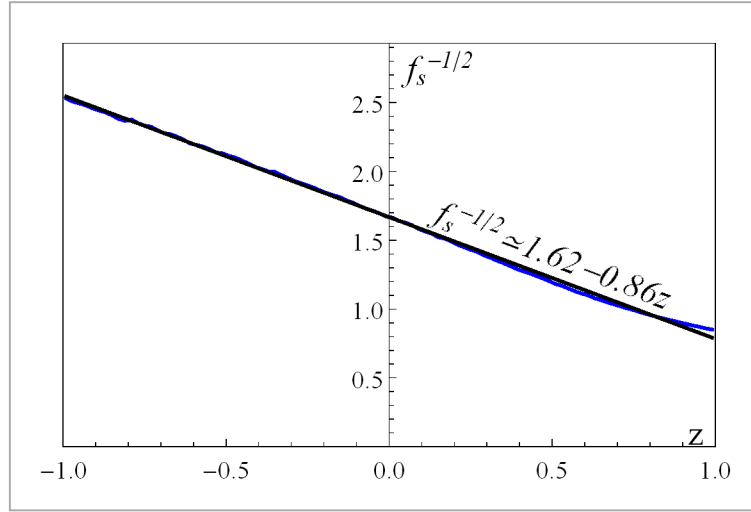


Рисунок 1.2 — Зависимость  $f_s^{-1/2}$  от  $z$  для «JHTDB-распределения» и линейная аппроксимация (1.13) вместе с аналитическим выражением для нее.

## 1.2 Распределение тензора скоростей деформации в случае обратимой по времени статистики скорости

Прежде чем перейти к следствиям для турбулентной статистики поля скорости, которая является статистически необратимой остановимся на случае обратимой статистики.

Можно аналитически показать, что симметрия (1.7) справедлива и для случая произвольного обратимого распределения с  $a$  равным нулю. Действительно, статистическая необратимость является следствием превалирования прямых процессов над обратными, то есть асимметрии функций распределения. Напротив, обратимая статистика должна в среднем содержать равное количество прямых и обратных процессов, что выражается в том факте, что распределение тензора скоростей деформации  $S_{ij}$  зависит только от квадратичного инварианта  $Q_S$  [60]. Поэтому из (A.6) следует, что функция распределения инвариантов  $Q_S$  and  $R_S$  также зависит только от  $q$  в статистически обратимом случае:

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = f_{rev}(q), \quad (1.15)$$

где  $f_{rev}$  — некоторая одномерная функция. Подставляя последнее выражение в (A.9), имеем:

$$f_{\xi_+ \xi_-}(x_+, x_-) = \frac{2^{4/3} f_{rev}\left(-\frac{1}{2^{2/3}}(x_+ + x_-)^{2/3}\right)}{9\sqrt{3}(x_+ + x_-)^{1/3}}. \quad (1.16)$$

Таким образом, вырождение (1.7) выполняется и в произвольном статистически обратимом случае с параметром  $a$  равным нулю. Подстановка  $a = 0$  в (1.11) и (1.12) приводит к универсальности функций распределения  $s$  и  $\beta$ :

$$f_s(z) = \frac{1}{2}, \quad (1.17)$$

$$f_\beta(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2). \quad (1.18)$$

Вычисленные  $f_s(z)$  и  $f_\beta(z)$  находятся в полном соответствии с предыдущими численными расчетами для гауссовоо поля скорости [63], которое, как известно, является обратимым (красная штрих-пунктирная и синяя пунктирная кривые на рисунке 1.3 совпадают с кривыми на рисунках 1(a) и (b) в [63] соответственно). Таким образом, результаты настоящего раздела обобщают численные результаты [63] на случай произвольной обратимой статистики поля скорости.

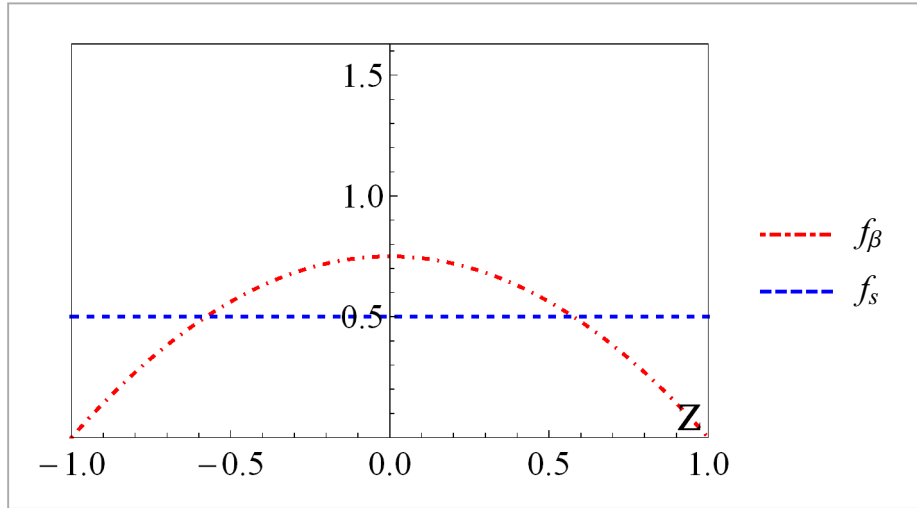


Рисунок 1.3 — Функции распределения (1.17) и (1.18) нормированных собственных значений  $s$  и  $\beta$  в статистически обратимом случае.

### 1.2.1 Случай гауссового распределения

Вычисленные в приложении А соотношения позволяют аналитически вычислить функции распределения различных инвариантов тензора скоростей деформации в случае изотропного поля скорости с гауссовой статистикой. Анализ этого случая помещен в приложение Б.

### 1.3 Аппроксимация турбулентной статистики тензора скоростей деформации

В этом разделе будет рассмотрена аппроксимация турбулентной статистики тензора скоростей деформации на примере «JHTDB-распределения». Для этого применяется симметрия, обнаруженная в разделе 1.1 и соображения, обсуждаемые ниже.

#### 1.3.1 Лог-нормальность статистики

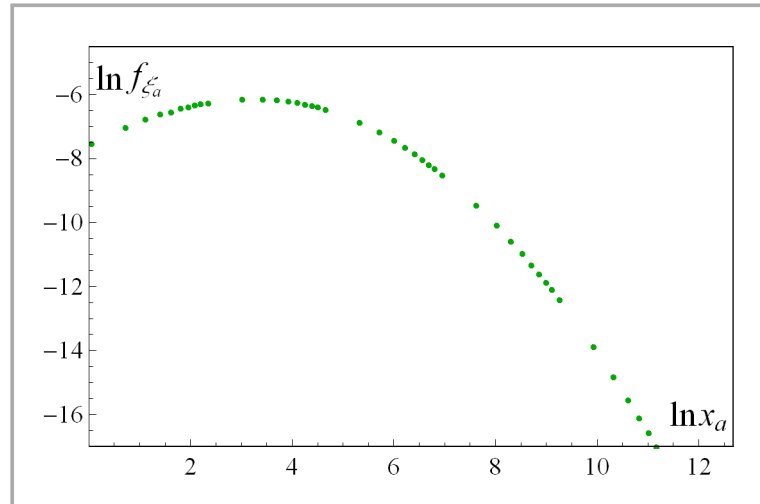


Рисунок 1.4 — Функция распределения  $\xi_a$  в случае «JHTDB-распределения» в логарифмическом масштабе.

Используя квазиодномерность распределения  $f_{\xi_+, \xi_-}$  (1.7), получаем соотношение между этой двумерной функцией распределения и одномерной функцией распределения инварианта  $\xi_a$ :

$$f_{\xi_+, \xi_-}(x_+, x_-) = \frac{1-a^2}{4\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right)} \times f_{\xi_a}\left(\frac{1+a}{2}x_+ + \frac{1-a}{2}x_-\right). \quad (1.19)$$

Функция распределения  $f_{\xi_a}$ , построенная на рисунке 1.4 в логарифмическом масштабе, отражает наличие логнормальности. Таким образом, рассмотрим логнормальную аппроксимацию общего вида:

$$f_{\xi_a}(x_a) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}\langle\omega^2\rangle^{1+\alpha}} e^{-\frac{(1+\alpha)^2}{4b}} \times x_a^\alpha \exp\left[-b\left(\ln\left(\frac{x_a}{\langle\omega^2\rangle}\right)\right)^2\right], \quad (1.20)$$

где  $\alpha$  и  $b > 0$  — подгоночные параметры, а  $\langle\omega^2\rangle \simeq 125$  — средний квадрат завихренности, введенный в аппроксимации для того, чтобы обезразмерить основание логарифма. В икотропной несжимаемой турбулентности имеет место связь:

$$\langle -Q_S \rangle = \langle \omega^2 \rangle. \quad (1.21)$$

Подстановка (1.20) в (1.19) и (A.8) и расчет  $\langle -Q_S \rangle$  дают новое ограничение на распределение (1.20). Результат удобно представить через распределение нормированного инварианта  $\eta_a$ :

$$\eta_a = \frac{\xi_a}{(\gamma\langle\omega^2\rangle)^{3/2}}, \quad (1.22)$$

где  $\gamma$  зависит только от  $a$ :

$$\gamma = \frac{10}{3} \frac{a(1-a^2)^{2/3}}{(1+a)^{5/3} - (1-a)^{5/3}} \simeq 0.81, \quad (1.23)$$

Функции распределения  $\xi_a$  и  $\eta_a$  очевидно связаны следующими соотношениями:

$$f_{\xi_a}(x_a) = \frac{1}{(\gamma\langle\omega^2\rangle)^{3/2}} f_{\eta_a}\left(\frac{x_a}{(\gamma\langle\omega^2\rangle)^{3/2}}\right) \quad (1.24)$$

$$f_{\eta_a}(y_a) = (\gamma\langle\omega^2\rangle)^{3/2} f_{\xi_a}\left((\gamma\langle\omega^2\rangle)^{3/2} y_a\right) \quad (1.25)$$

Легко показать из (1.20), что

$$f_{\eta_a}(y_a) = \left(\sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\frac{1}{36b}}\right) y_a^{-4/3} \exp\left[-b(\ln y_a)^2\right], \quad (1.26)$$

Таким образом  $b$  может быть определена численно. Результаты анализа представлены на рисунке 1.5:

$$b \simeq 0.175 \quad (1.27)$$

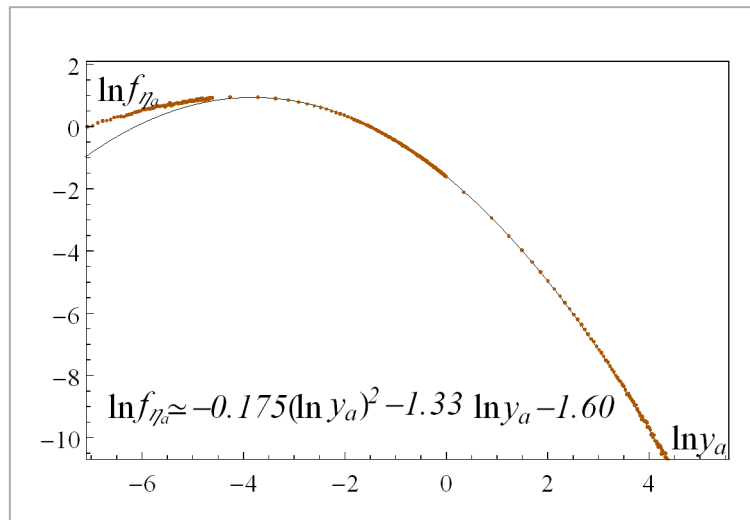


Рисунок 1.5 — Функция распределения  $\eta_a$  (1.22) в логарифмическом масштабе и аппроксимация (1.26)

Используя соотношения из приложения А из аппроксимации (1.26) можно получить аппроксимацию всего тензора скоростей деформации, зависящую только от  $a$  и  $b$  (см. рисунки в приложении В)

## Глава 2. Линейная гауссова модель для динамики крупномасштабной завихренности

В настоящем разделе сформулирована простая теоретическая модель, в которой задача о динамике жидкой частицы в инерционном интервале масштабов сведена к линейной стохастической задаче.

### 2.1 Динамика крупномасштабной завихренности

В развитом турбулентном потоке (при рассмотрении структур масштабов много больших колмогоровского) можно пренебречь вязкостью. Тогда динамика завихренности определяется следующим уравнением:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{v} \quad (2.1)$$

Поведение завихренности в системе отсчета жидкой частицы можно преобразовать к виду:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}, t)}{dt} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}, t) \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}, t) \quad (2.2)$$

Здесь  $\boldsymbol{\rho}$  - координата в системе отсчета, связанной с некоторой точкой в жидкой частице, а  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\rho}, t)$  и  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}, t)$  - завихренность и тензор скоростей деформации в этой системе отсчета. Элементы симметричного тензора  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}, t)$  обозначены здесь в противоположность обозначению самого тензора строчными буквами, как и для большинства тензоров и матриц, рассматриваемых далее. Рассмотрим интенсивную локально-неизотропную структуру (вихревую нить) внутри жидкой частицы. Как показано в [58], тензор скоростей деформации в центре жидкой частицы можно разделить на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие, определяющиеся, соответственно, полем скорости внутри и вне жидкой частицы. Поскольку внутри вихревой нити и вблизи нее тензор скоростей деформации ортогонален завихренности [14, Приложение 1], при рассмотрении ее динамики в уравнении (2.2) можно заменить тензор  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\rho}, t)$  на крупномасштабный  $\mathbf{S}(t)$  :



$$\frac{d\omega(\rho,t)}{dt} = \mathbf{S}(t)\omega(\rho,t) \quad (2.3)$$

Поскольку для относительно малых жидких частиц крупномасштабная завихренность  $\omega(t)$  определяется наиболее интенсивной структурой внутри жидкой частицы [7; 18; 59], то последнее уравнение также можно рассматривать как уравнение динамики завихренности небольшой жидкой частицы из инерционного интервала<sup>1</sup>, заменив  $\omega(\rho,t)$  на крупномасштабную завихренность  $\omega(t)$  всей частицы:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \mathbf{S}(t)\omega(\rho,t) \quad (2.4)$$

Энергия трехмерного турбулентного потока передается из больших масштабов в меньшие, поэтому динамика больших масштабов определяет динамику меньших и, напротив, динамика малых масштабов незначительно сказывается на динамике больших. Таким образом, можно предположить, что в уравнение (2.4) тензор  $\mathbf{S}(t)$  входит как внешний случайный источник, не зависящий от  $\omega(t)$ . Применимость такого подхода численно продемонстрирована в работе [59]. Источник будем для простоты считать гауссовым. Приведенные после уравнения (2.4) соображения вместе с самим уравнением (2.4) составляют основу теоретического рассмотрения задачи. Это уравнение можно рассматривать как линейную модель эффекта.

## 2.2 Затухание корреляторов на больших временах

На основе уравнения (2.4) рассмотрим затухание начальных возмущений в невыделенном базисе (которым становится базис  $(\mathbf{e}_1(0), \mathbf{e}_2(0), \mathbf{e}_3(0))$  на больших временах), которое можно сопоставить с затуханием, обнаруженным в [52; 53]. Все пять независимых компонент  $S_{ij}(t)$  в рассматриваемой задаче можно считать случайными процессами, определяющими динамику  $\omega(t)$ . Если предположить, что эти случайные процессы гауссовы, то для описания их статистических свойств, как известно [75], достаточно знать парные корреляции процессов. Для простоты предположим процесс  $S_{ij}(t)$  дельта-коррелированным [76].

---

<sup>1</sup>Такие частицы рассматриваются в [52; 53]

$$\langle S_{ij}(t)S_{kl}(t') \rangle_{S_{\alpha\beta}(\tau)} = D_{ijkl}\delta(t-t') \quad (2.5)$$

Здесь,  $t \geq 0$  и  $t' \geq 0$  – некоторые моменты времени,  $\delta(t-t')$  – дельта-функция [77; 78],  $D_{ijkl}$  – корреляционный тензор, а индекс у скобок усреднения  $S_{\alpha\beta}(\tau)$  означает, что усреднение проводится по ансамблю реализаций всей пятерки независимых процессов, которые определены при  $\tau \in [0, +\infty)$ . При сделанных предположениях с помощью уравнения (2.4) и формулы Фурутцу – Новикова [76] можно получить следующее уравнение на функцию распределения завихренности  $f(t, \omega)$ :

$$\begin{aligned} f(t, \omega) &= \langle \delta(\omega - \omega(t)) \rangle \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= D_{ijkl} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left\{ \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega_l f) \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу статистической однородности и изотропности, а также несжимаемости потока, корреляционный тензор  $D_{ijkl}$  зависит только от одной константы  $D$ :

$$D_{ijkl} = D (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (2.7)$$

Этот факт сильно упрощает уравнение (2.6), в котором в этом случае будет удобно перейти к сферическим координатам:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \cos \theta = \omega \mu \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \cos \varphi = \omega \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \\ \omega_3 = \omega \sin \theta \sin \varphi = \omega \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \end{cases}$$

Итак, подставив выражение (2.5) в уравнение (2.6) и произведя в нем замену, после преобразований можно получить:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{2} \left( \frac{4}{3\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega^4 \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2.8)$$

Таким образом, умножив это уравнение на  $\mu^2$  и проинтегрировав по пространству  $\omega$ , можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение на искомую величину (в роли которой может выступать и  $\alpha_t^2$ , и  $\beta_t^2$ , и  $\gamma_t^2$ ):

$$\frac{d}{dt} \langle \mu^2(t) \rangle_{\omega(\tau)} = 2D (1 - 3 \langle \mu^2(t) \rangle_{\omega(\tau)}) \quad (2.9)$$

Пусть  $\langle \mu^2(0) \rangle_{\omega(\tau)}$  – начальное возмущение. Тогда решение:

$$\langle \mu^2(t) \rangle_{\omega(\tau)} = \frac{1}{3} + (\langle \mu^2(0) \rangle_{\omega(\tau)} - \frac{1}{3}) \exp(-2Dt) \quad (2.10)$$

Важным свойством этого решения является наличие стационарной точки  $\langle \mu^2(t) \rangle_{\omega(\tau)} = 1/3$ . Наличие такого решения можно было бы предположить заранее, поскольку невыделенный базис должен сохранять изотропию направлений. Выражение (2.10) представляет асимптотику  $\alpha_t^2$ ,  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$  на больших временах. Экспоненциальное затухание на больших временах действительно наблюдается в [52; 53].

### 2.3 Тензор скоростей деформации в базисе своих собственных векторов

Рассмотрим крупномасштабный тензор скоростей деформации  $S_{ij}(t)$  в базисе его собственных векторов  $\mathbf{e}_1(t)$ ,  $\mathbf{e}_2(t)$  и  $\mathbf{e}_3(t)$ , где он имеет наиболее простой вид:

$$\mathbf{S}^{eig}(t) = S_{ij}^{eig}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Здесь  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  и  $\lambda_3(t)$  – собственные значения тензора скоростей деформации суть случайные процессы. При этом из условия несжимаемости потока:

$$\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = 0 \quad (2.12)$$

Упорядочим теперь собственные векторы  $\mathbf{e}_1(t)$ ,  $\mathbf{e}_2(t)$  и  $\mathbf{e}_3(t)$  таким образом, чтобы вектору  $\mathbf{e}_1(t)$  всегда соответствовало наибольшее собственное число  $\lambda_1(t)$ , вектору  $\mathbf{e}_2(t)$  промежуточное  $\lambda_2(t)$  и вектору  $\mathbf{e}_3(t)$  наименьшее  $\lambda_3(t)$ :

$$\lambda_1(t) > \lambda_2(t) > \lambda_3(t) \quad (2.13)$$

В случае гауссова распределенного поля скорости, тензор скоростей деформации также распределен нормально (как производная гауссового поля)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Важной «негауссовой» особенностью турбулентного поля скорости является положительность (в среднем) промежуточного собственного числа  $\langle \lambda_2(t) \rangle_{\lambda_2(\tau)} > 0$  [46; 53; 67; 79; 80], что характеризует необратимость каскадного процесса переноса энергии с больших масштабов на малые. Поскольку в

Причем если положить у поля скорости те же спектральные характеристики, что и в изотропном турбулентном потоке, то можно найти явный вид распределения тензора скоростей деформации [46; 81]. Из него в свою очередь можно найти математические ожидания собственных значений:

$$\langle \lambda_1(t) \rangle_{\lambda(\tau)} = \lambda, \quad \langle \lambda_2(t) \rangle_{\lambda(\tau)} = 0, \quad \langle \lambda_3(t) \rangle_{\lambda(\tau)} = -\lambda, \quad \lambda = 3\sqrt{\frac{3\langle \omega^2 \rangle}{10\pi}} \quad (2.14)$$

Здесь  $\langle \omega^2 \rangle$  – среднее значение квадрата завихренности жидкой частицы. Последние усреднения производятся по ансамблю реализаций случайного процесса  $\lambda(\tau) = (\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \lambda_3(\tau))$ . Проанализируем зависимость  $\langle \omega^2 \rangle$  от размера жидкой частицы  $r_0$ . Очевидно, что при увеличении жидкой частицы,  $\langle \omega^2 \rangle$  стремится к нулю. С другой стороны, при масштабах частицы порядка колмогоровского,  $\langle \omega^2 \rangle$  не зависит от ее размера и определяется по известной формуле  $\langle \omega^2 \rangle = \varepsilon/\nu = (\varepsilon/\eta^2)^{2/3}$ , где  $\varepsilon$  – это скорость диссипации энергии,  $\nu$  – кинематическая вязкость, а  $\eta$  – размер колмогоровского масштаба [7]. В инерционном интервале влияние вязкости несущественно, поэтому из теории размерности  $\langle \omega^2 \rangle$ . Сшивая эти две зависимости, имеем:

$$\langle \omega^2 \rangle = \begin{cases} \varepsilon/\nu, & r_0 \leq \eta \\ (\varepsilon/r_0^2)^{2/3}, & r_0 > \eta \end{cases} \quad (2.15)$$

Процесс  $S_{ij}^{eig}(t)$  можно разбить на постоянную по времени случайную часть  $S_{ij}^{eig}(0)$  (начальные условия), и процесс  $S_0^{eig}(t)$  с нулевым математическим ожиданием:

$$\mathbf{S}^{eig}(t) = \mathbf{S}^{eig}(0) + \mathbf{S}_0^{eig}(t) = \quad (2.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(0) + \lambda_{0_1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(0) + \lambda_{0_2}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(0) + \lambda_{0_3}(t) \end{pmatrix}$$

$$\langle S^{eig}(0) \rangle_{\lambda(\tau)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \langle S_0^{eig}(t) \rangle_{\lambda(\tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

---

данной работе используется гауссово приближение, этот эффект не учитывается. Его учет планируется в дальнейшем.

Положим процессы  $\lambda_{0_1}$ ,  $\lambda_{0_2}$  и  $\lambda_{0_3}$  (процесс  $\lambda_0$ ) гауссовыми шумами на фоне средних значений<sup>3</sup>. Для простоты анализа можно предположить, что они являются независимыми дельта-коррелированными гауссовыми шумами с одинаковыми статистическими характеристиками. Тогда парные корреляции случайных процессов  $\lambda_{0_1}$ ,  $\lambda_{0_2}$  и  $\lambda_{0_3}$  можно определить как:

$$\langle \lambda_{0_1}(t)\lambda_{0_1}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} = \langle \lambda_{0_2}(t)\lambda_{0_2}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} = \langle \lambda_{0_3}(t)\lambda_{0_3}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} = \Lambda\delta(t-t') \quad (2.18)$$

Из несжимаемости можно получить и перекрестные корреляции в виде:

$$\langle \lambda_{0_i}(t)\lambda_{0_j}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \Lambda\delta(t-t') = \Lambda_{ij}\delta(t-t') \quad (2.19)$$

где  $\Lambda_{ij}$  – корреляционная матрица<sup>4</sup> процесса  $\lambda_0(t)$ .

## 2.4 Тензор скоростей деформации в базисе своих изначально собственных векторов

Как показано в 2.1, уравнение (2.4) является верным в системе отсчета, поступательно движущейся с жидкой частицей (ПСО), каковой не является система отсчета, жестко связанная с собственным базисом тензора скоростей деформации (ССО). Выберем в качестве ПСО систему отсчета, оси которой  $\mathbf{e}_1(0)$ ,  $\mathbf{e}_2(0)$  и  $\mathbf{e}_3(0)$  изначально совпадают с осями ССО  $\mathbf{e}_1(t)$ ,  $\mathbf{e}_2(t)$  и  $\mathbf{e}_3(t)$ . ССО удобно при рассмотрении считать неподвижной. В результате вращения ПСО относительно ССО, тензор скоростей деформации преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{R}^T(t)\mathbf{S}^{eig}(t)\mathbf{R}(t) \quad (2.20)$$

<sup>3</sup>На самом деле, это не совсем корректная процедура. Ведь даже при гауссово распределенной матрице ее собственные значения будут распределены существенно негауссово [46; 82]. Однако для оценки можно положить и этот процесс гауссовым. Более того, мы увидим, что коррелятор  $\alpha_t^2$  фактически не зависит от статистических свойств  $\lambda_0$ , а определяется начальными средними.

<sup>4</sup>Из этой матрицы легко показать, что собственные значения являются линейно зависимыми в согласии с условием несжимаемости потока.

Здесь  $\mathbf{R}(t)$  – зависящая от времени матрица поворота ПСО относительно ССО, а  $\mathbf{S}(t)$  и есть тот тензор, который входит в уравнение (1.2). В общем случае матрицу  $\mathbf{R}(t)$ , как известно, можно определить с помощью следующего матричного дифференциального уравнения [83, стр. 453]:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{R}(t)\mathbf{O}(t) \quad (2.21)$$

Здесь  $\mathbf{O}(t)$  – антисимметричная матрица угловых скоростей вращения ПСО относительно ССО:

$$\mathbf{O}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -o_3(t) & o_2(t) \\ o_3(t) & 0 & -o_1(t) \\ -o_2(t) & o_1(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Поскольку в нулевой момент времени ССО и ПСО совпадают, матрица перехода  $\mathbf{R}(0)$  является единичной матрицей:

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{E} \quad (2.23)$$

Предположим компоненты  $\mathbf{O}(t)$  дельта-коррелированными, гауссовыми и независимыми:

$$\langle o_i(t)o_j(t') \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \Omega\delta_{ij}\delta(t-t') \quad (2.24)$$

Усреднение в (2.24) ведется по реализациям трехмерного вектора случайных процессов  $\mathbf{o}(\tau) = (o_1(\tau), o_2(\tau), o_3(\tau))$ . Подставляя теперь (2.17) в (2.20), можно получить следующее разложение тензора скоростей деформации на два слагаемых:

$$S_{ij}(t) = S_{ij}^0(t) + S_{0_{ij}}(t) \quad (2.25)$$

Здесь введены обозначения:

$$S_{ij}^0(t) = \lambda_{(n)}(0)r_{in}(t)r_{jn}(t) \quad (2.26)$$

$$S_{0_{ij}}(t) = \lambda_{0_{(n)}}(t)r_{in}(t)r_{jn}(t) \quad (2.27)$$

Тензорный индекс, стоящий в скобке, означает, что суммирование ведется по нему вместе с индексами, не стоящими в скобках, например:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^0(t) &= \lambda_{(n)}(0)r_{in}(t)r_{jn}(t) = \\
&= \lambda_1(0)r_{i1}(t)r_{j1}(t) + \lambda_2(0)r_{i2}(t)r_{j2}(t) + \lambda_3(0)r_{i3}(t)r_{j3}(t) \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Усреднение необходимо провести как по начальным условиям  $\lambda(0)$ , так и по случайным процессам  $\lambda_0(t)$  и  $\mathbf{o}(t)$ , которые суть один процесс. Это означает, что к условиям (2.19) и (2.24) следует добавить перекрестные парные корреляции. Можно для простоты предположить,  $\lambda_0(t)$  и  $\mathbf{o}(t)$  независимыми

$$\langle \lambda_{0_i}(t)o_j(t') \rangle_{\lambda_0(\tau), \mathbf{o}(\tau)} = 0 \quad (2.29)$$

Совокупность условий (2.19), (2.24) и (2.29) далее будет называться гауссовой дельта-коррелированной моделью тензора скоростей деформации.

## 2.5 Затухание усредненного тензора в базисе изначально собственных векторов

В разд. 3 и разд. 4 была сформулирована гауссова дельта-коррелированная модель тензора скоростей деформации. Для того, чтобы применить ее к стохастическому уравнению (2.4) необходимо найти математическое ожидание и парную корреляцию тензора скоростей деформации. В этом разделе мы найдем математическое ожидание  $\langle S_{ij}(t) \rangle_{\lambda_0(\tau), \mathbf{o}(\tau)} = \langle S_{ij}(t) \rangle_{proc}$  (для краткости усреднение по процессу обозначено индексом *proc*).

Поскольку

$$\langle S_{0ij}(t) \rangle_{proc} = \langle \lambda_{0_{(n)}}(t)r_{in}(t)r_{jn}(t) \rangle_{proc} = \langle \lambda_{0_{(n)}}(t) \rangle_{\lambda_0(\tau)} \langle r_{in}(t)r_{jn}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = 0 \quad (2.30)$$

искомые корреляторы можно упростить:

$$\langle S_{ij}(t) \rangle_{proc} = \lambda_{(n)}(0) \langle r_{in}(t)r_{jn}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} \quad (2.31)$$

Для их нахождения можно ввести функцию распределения матрицы вращения:

$$f(\mathbf{R}, t) = \langle \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}(t)) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} \quad (2.32)$$

Используя уравнения (2.21) с начальными условиями (2.23), получается следующее уравнение с начальными условиями для функции  $f(\mathbf{R}, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Omega \left( r_{pm} \frac{\partial}{\partial r_{pl}} \left( r_{km} \frac{\partial}{\partial r_{kl}} f \right) - r_{pl} \frac{\partial}{\partial r_{pm}} \left( r_{km} \frac{\partial}{\partial r_{kl}} f \right) \right) \quad (2.33)$$

$$f(\mathbf{R}, 0) = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{E}) \quad (2.34)$$

Зная функцию распределения, можно вычислить необходимый коррелятор, как интеграл по девятимерному пространству:

$$\lambda_{(n)}(0) \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \lambda_{(n)}(0) \int r_{in} r_{jn} f(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} \quad (2.35)$$

Здесь  $d\mathbf{R}$  – девятимерный дифференциал. Умножим на величину  $\lambda_{(n)}(0) r_{in} r_{jn}$  правую и левую части (2.33) и начальное условие (2.34). Полученные выражения проинтегрируем по  $d\mathbf{R}$ . В результате этого интегрирования получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\lambda_{(n)}(0) \frac{d}{dt} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = 2\Omega (\lambda_{(l)}(0) - \lambda_{(n)}(0)) \delta_{ll} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} \quad (2.36)$$

$$\lambda_{(n)}(0) \langle r_{in}(0) r_{jn}(0) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \lambda_{(n)}(0) \delta_{in} \delta_{jn} \quad (2.37)$$

Условие несжимаемости потока позволяет преобразовать это уравнение к виду:

$$\frac{d}{dt} \langle S_{ij}^0(t) \rangle_{proc} = -6\Omega \langle S_{ij}^0(t) \rangle_{proc} \quad (2.38)$$

$$\langle S_{ij}^0(0) \rangle_{proc} = \begin{pmatrix} \lambda_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(0) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Это линейное уравнение, решение которого задается формулой:

$$\langle S_{ij}^0(t) \rangle_{proc} = \begin{pmatrix} \lambda_1(0)e^{-6\Omega t} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(0)e^{-6\Omega t} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(0)e^{-6\Omega t} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Таким образом, в гауссовой дельта-коррелированной модели диагональные элементы, связанные с выделенностью изначально выбранного базиса,



со временем затухают. Обратим внимание, во-первых, что не смотря на дельта-коррелированность управляющих процессов, наблюдается инерционный экспоненциальный спад диагональных элементов тензора. Во-вторых, очень существенна роль несжимаемости в универсальности этого процесса. Действительно, например, у единичного тензора (очевидно, с ненулевым следом), одинакового во всех системах отсчета, не может наблюдаться никакого затухания диагональных элементов.

## 2.6 Изотропизация корреляционного тензора в базисе изначально собственных векторов

Рассмотрим парный коррелятор тензора скоростей деформации:

$$\langle (S_{ij}(t) - \langle S_{ij}(t) \rangle_{proc}) (S_{kl}(t') - \langle S_{kl}(t') \rangle_{proc}) \rangle_{proc} = \langle S_{0_{ij}}(t) S_{0_{kl}}(t') \rangle_{proc} \quad (2.41)$$

Для его нахождения требуется функция распределения, зависящая от двух моментов времени:

$$f(\mathbf{R}, \mathbf{R}', t, t') = \langle \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}(t)) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}(t')) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} \quad (2.42)$$

Однако в гауссовой дельта-коррелированной модели для его нахождения также достаточно функции распределения  $f(\mathbf{R}, t)$ . Покажем это. Опуская некоторые простые преобразования, имеем

$$\langle S_{0_{ij}}(t) S_{0_{kl}}(t') \rangle_{proc} = \langle \lambda_{0_{(n)}}(t) \lambda_{0_{(m)}}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) r_{km}(t') r_{lm}(t') \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} \quad (2.43)$$

Тогда для преобразованного парного коррелятора имеем:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_{0_{(n)}}(t) \lambda_{0_{(m)}}(t') \rangle_{\lambda(\tau)} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) r_{km}(t') r_{lm}(t') \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\ & = \delta(t - t') \Lambda_{(m)(n)} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) r_{km}(t) r_{lm}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\ & = \delta(t - t') \Lambda_{(m)(n)} \langle r_{in}(t) r_{jn}(t) r_{km}(t) r_{lm}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \\ & = \delta(t - t') \Lambda_{(m)(n)} \int r_{in} r_{jn} r_{km} r_{lm} f(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.44)$$

То есть, парный коррелятор зависит только от одномоментной функции распределения  $f(\mathbf{R}, t)$ . Последнее выражение можно преобразовать, используя конкретный вид корреляционного тензора  $\Lambda_{mn}$  из (2.19):

$$\delta(t - t') \Lambda_{(m)(n)} \int r_{in} r_{jn} r_{km} r_{lm} f(\mathbf{R}, t) d\mathbf{R} = \quad (2.45)$$

$$= \Lambda \delta(t - t') \left( \frac{3}{2} \langle nn(n)(n) \rangle(t) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (2.46)$$

Здесь для удобства введено следующее обозначение:

$$\langle r_{ip}(t) r_{jq}(t) r_{kr}(t) r_{ls}(t) \rangle_{\mathbf{o}(\tau)} = \langle pqrs \rangle(t) \quad (2.47)$$

Таким образом, теперь надо найти коррелятор  $\langle nn(n)(n) \rangle$ . Умножая правую и левую части (2.33), а также (2.34) на  $r_{in}(t) r_{jn}(t) r_{k(n)}(t) r_{l(n)}(t)$  и интегрируя по  $d\mathbf{R}$ , можно получить следующее линейное уравнение и начальное условие:

$$\frac{d}{dt} \langle nn(n)(n) \rangle(t) = -20 \langle nn(n)(n) \rangle(t) + 4 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (2.48)$$

$$\langle nn(n)(n) \rangle(0) = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{(i)(k)} \quad (2.49)$$

Решение этого уравнения задается следующей формулой:

$$\langle nn(n)(n) \rangle(t) = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{(i)(k)} e^{-20\Omega t} + \frac{1}{5} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) (1 - e^{-20\Omega t}) \quad (2.50)$$

Подставляя получившееся выражение в (2.45) можно получить выражение для парной корреляции:

$$\begin{aligned} \langle S_{0_{ij}}(t) S_{0_{kl}}(t') \rangle_{proc} &= \left( \frac{3}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{(i)(k)} e^{-20\Omega t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{10} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) (1 - e^{-20\Omega t}) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \Lambda \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.51)$$

По истечении большого количества времени это выражение переходит в выражение (2.5) для изотропного тензора:

$$\begin{aligned} \langle S_{0_{ij}}(t) S_{0_{kl}}(t') \rangle_{proc} &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle S_{ij}(t) S_{kl}(t') \rangle_{S_{\alpha\beta}(\tau)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{3}{10} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \Lambda \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.52)$$

Таким образом для константы  $D$  из (2.5) имеем:

$$D = \frac{3}{10}\Lambda \quad (2.53)$$

Полученный результат вместе с выражением для затухания математических ожиданий (2.40) означает согласованность построенной в **разд. 3** и **разд. 4** гауссовой модели тензора скоростей деформации и изотропной гауссовой модели из **разд. 2** пригодной для рассмотрения эффекта только на больших временах.

Для малых времен инерционный экспоненциальный спад парной корреляции при дельта-коррелированности управляющих процессов означает, что силы инерции, связанные с вращением системы отсчета собственных значений тензора не вносят поправок в первый порядок разложения корреляторов  $\alpha_t^2$ ,  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$  по времени, что будет использовано в следующем разделе при получении выражения для пируэт-эффекта в построенной модели.

## 2.7 Линейная асимптотика корреляторов на малых временах

Теперь, имея выражения (2.40) и (2.51), можно проанализировать пируэт-эффект, наблюдаемый на малых временах. В пределе  $t \rightarrow 0$  выражения (2.40) и (2.51) дают математическое ожидание и парные корреляции тензора скоростей деформации в базисе его собственных векторов:

$$\langle S_{ij}^0(t) \rangle_{proc} = \begin{pmatrix} \lambda_1(0) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(0) \end{pmatrix} = \lambda_{(i)} \delta_{ij} \quad (2.54)$$

$$\langle S_{0_{ij}}(t) S_{0_{kl}}(t') \rangle_{proc} = \left( \frac{3}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{(i)(k)} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \Lambda \delta(t - t') = D_{ijkl} \delta(t - t') \quad (2.55)$$

Применяя формулу Фурутцу – Новикова для уравнения (2.4), можно получить следующее уравнение второго порядка на функцию распределения завихренности  $f(t, \omega)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} f = -\lambda_{(i)} \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\omega_i f) + D_{ijkl} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left( \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega_l f) \right) \quad (2.56)$$

Найдем функцию Грина для уравнения (2.56):

$$\frac{\partial}{\partial t} G = -\lambda_{(i)} \frac{\partial}{\partial \omega_i} (\omega_i G) + D_{ijkl} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left( \omega_j \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega_l G) \right) \quad (2.57)$$

$$G(0, \omega - \omega^0) = \delta(\omega - \omega^0) \quad (2.58)$$

Зная функцию Грина  $G(t, \omega - \omega^0)$  и начальные распределения собственных значений и завихренности, можно будет найти искомые корреляторы  $\alpha_t^2$ ,  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$ . Например, для коррелятора  $\alpha_t^2$ :

$$\alpha_t^2 = \int \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} G(t, \omega - \omega^0) f_0(\omega^0) f_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\omega d\omega^0 d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.59)$$

где  $f_0(\omega^0)$  – начальная функция распределения завихренности, выражение для которой будет предложено в **разд. 8**,  $f_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$  – начальная функция распределения собственных значений, необходимые свойства которой обсуждались в **разд. 3** (2.14),  $G(t, \omega - \omega^0)$  – функция Грина. Последняя зависит от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметрически. В уравнении (2.57) можно произвести замену, делающую его линейным и приводящую его к так называемому каноническому виду [77]:

$$\begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (e^{\omega_1} + e^{\omega_2} + e^{\omega_3}) \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\omega_1} - e^{\omega_3}) \\ \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-e^{\omega_1} + 2e^{\omega_2} - e^{\omega_3}) \end{cases}$$

В результате этой замены<sup>5</sup> получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} G = \frac{\sqrt{2}}{2} (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial \eta_2} G - \frac{3}{\sqrt{6}} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \eta_3} G + \frac{3}{2} \Lambda \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} G + \frac{\partial^2}{\partial \eta_3^2} G \right) \quad (2.60)$$

Отметим, что в уравнение (2.60) не входит  $\eta_1$ . Начальное условие (2.58) после замены, вследствие свойств дельта-функции [78], переписется следующим образом:

$$G(0, \eta - \eta^0) = \exp(-3\eta_1^0) \delta(\eta - \eta^0) \quad (2.61)$$

---

<sup>5</sup>Вообще говоря, эта замена справедлива только для сектора пространства:  $\{\omega_1 \geq 0; \omega_2 \geq 0; \omega_3 \geq 0\}$ . Однако, ввиду четности (инвариантности относительно замены  $\omega_i$  на  $-\omega_i$ ) и самоподобия (инвариантности относительно замены  $\omega_i$  на  $a\omega_i$ ) выражения (2.59) для коррелятора  $\alpha_t^2$  и подобных ему выражений для корреляторов  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$ , интегрирование можно проводить исключительно по этому сектору.

Здесь  $\eta^0$  – начальные значения  $\eta$ . Уравнение (2.60) с начальным условием (2.61) решается с помощью преобразования Фурье:

$$G(t, \eta - \eta^0) = \frac{\exp(-\sqrt{3}\eta_1^0)}{6\pi\Lambda t} \delta(\eta_1 - \eta_1^0) \times \exp\left(-\frac{(2(\eta_2 - \eta_2^0) - \sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_3)t)^2}{24\Lambda t}\right) \exp\left(-\frac{(\sqrt{6}(\eta_3 - \eta_3^0) - 3\lambda_2 t)^2}{36\Lambda t}\right) \quad (2.62)$$

Делая замену на  $\eta$  в интеграле (2.59), и подставляя в него полученное выражение для функции Грина, после несложных преобразований имеем:

$$\alpha_t^2 = \int \frac{(\omega_1^0)^2 \exp(\sqrt{2}\eta_2)}{(\omega_1^0)^2 \exp(\sqrt{2}\eta_2) + (\omega_2^0)^2 \exp(\sqrt{6}\eta_3) + (\omega_3^0)^2 \exp(-\sqrt{2}\eta_2)} f_0(\omega^0) f_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \times \exp\left(-\frac{(2\eta_2 - \sqrt{2}(2\lambda_1 + \lambda_2)t)^2}{24\Lambda t}\right) \exp\left(-\frac{(2\eta_3 - \sqrt{6}\lambda_2 t)^2}{24\Lambda t}\right) d\eta_2 d\eta_3 d\omega^0 d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.63)$$

Для того, чтобы получить асимптотику последнего интеграла вблизи  $t = 0$ , проведем в нем еще одну замену:

$$\zeta_2 = \frac{2\eta_2 - \sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_3)t}{2\sqrt{\Lambda t}} \quad \zeta_3 = \frac{2\eta_3 - \sqrt{6}\lambda_2 t}{2\sqrt{\Lambda t}} \quad (2.64)$$

В результате получим:

$$\alpha_t^2 = \int \Omega_1 \Omega_2^{-1} f_0(\omega^0) f_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \exp\left(-\frac{\zeta_2^2 + \zeta_3^2}{6}\right) d\eta_2 d\eta_3 d\omega^0 d\lambda_1 d\lambda_2 \quad (2.65)$$

$$\Omega_1 = (\omega_1^0)^2 e^{\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2\lambda_1 t} \quad (2.66)$$

$$\Omega_2 = (\omega_1^0)^2 e^{\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2\lambda_1 t} + (\omega_2^0)^2 e^{\sqrt{6\Lambda t}\zeta_3 + 2\lambda_2 t} + (\omega_3^0)^2 e^{-\sqrt{2\Lambda t}\zeta_2 + 2\lambda_3 t} \quad (2.67)$$

Дробь  $\Omega_1/\Omega_2$  в этом выражении можно разложить в ряд Тейлора в окрестности  $t = 0$ <sup>6</sup>. Не конкретизируя, в виду громоздкости, это разложение, напомним его в виде:

$$\Omega_1/\Omega_2 = A_0\left(\frac{\omega^0}{|\omega^0|}\right) + a_1\left(\frac{\omega^0}{|\omega^0|}, \lambda, \Lambda, \zeta\right) \sqrt{t} + A_1\left(\frac{\omega^0}{|\omega^0|}, \lambda, \Lambda, \zeta\right) t + O(t^{3/2}) \quad (2.68)$$

При этом введенные функции  $A_0(\omega^0/|\omega^0|)$ ,  $a_1(\omega^0/|\omega^0|, \lambda, \Lambda, \zeta)$  и  $A_1(\omega^0/|\omega^0|, \lambda, \Lambda, \zeta)$  представляют собой полиномы относительно всех своих

<sup>6</sup>Строго говоря, смысл имеет раскладывать подынтегральное выражения только до первого порядка, поскольку для учета квадратичных поправок необходимо решать уравнение с полным корреляционным тензором из (2.51).

аргументов. Несложно показать, что в полиноме  $a_1$  или степень  $\zeta_1$ , или степень  $\zeta_2$ , входящих в него, нечетна. То есть, после интегрирования по переменной  $\zeta$ , в разложении останутся только целые степени  $t$ . Введем для удобства следующее обозначение для усреднения по начальным направлениям  $\omega(t)$ :

$$\langle H(\omega) \rangle_0 = \int H(\omega^0) f_0(\omega^0) d\omega^0 \quad (2.69)$$

Произведя окончательное усреднение по начальным условиям  $\lambda(t)$  с помощью (2.14), можно получить:

$$\begin{aligned} \alpha_t^2 = & \langle \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \rangle_0 + 2\lambda t \left( \langle \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega^4} \rangle_0 + 2 \langle \frac{\omega_1^2 \omega_3^2}{\omega^4} \rangle_0 \right) + \\ & + 12\Lambda t \left( \langle \frac{\omega_1^2 \omega_2^4}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_1^4 \omega_2^2}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_1^4 \omega_3^2}{\omega^6} \rangle_0 + \langle \frac{\omega_2^2 \omega_3^4}{\omega^6} \rangle_0 \right) + O(t^2) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Для корреляторов  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$  аналогичным образом получаются похожие выражения:

$$\begin{aligned} \beta_t^2 = & \langle \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \rangle_0 + 2\lambda t \left( \langle \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{\omega^4} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega^4} \rangle_0 \right) + \\ & + 12\Lambda t \left( \langle \frac{\omega_1^4 \omega_2^2}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_1^2 \omega_2^4}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_2^4 \omega_3^2}{\omega^6} \rangle_0 + \langle \frac{\omega_2^2 \omega_3^4}{\omega^6} \rangle_0 \right) + O(t^2) \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \gamma_t^2 = & \langle \frac{\omega_3^2}{\omega^2} \rangle_0 - 2\lambda t \left( 2 \langle \frac{\omega_1^2 \omega_3^2}{\omega^4} \rangle_0 + \langle \frac{\omega_2^2 \omega_3^2}{\omega^4} \rangle_0 \right) + \\ & + 12\Lambda t \left( \langle \frac{\omega_1^4 \omega_3^2}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_1^2 \omega_3^4}{\omega^6} \rangle_0 - \langle \frac{\omega_2^2 \omega_3^4}{\omega^6} \rangle_0 + \langle \frac{\omega_2^4 \omega_3^2}{\omega^6} \rangle_0 \right) + O(t^2) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Наглядный смысл коэффициентов при  $\lambda t$  и  $\Lambda t$  удобно проиллюстрировать, считая функцию распределения начальной завихренности изотропной. В этом случае все коэффициенты при величине  $\Lambda t$  равны нулю. Для выражений  $\alpha_t^2$ ,  $\beta_t^2$  и  $\gamma_t^2$  коэффициенты при комплексе  $\lambda t$  равны  $8/15$ ,  $0$  и  $-8/15$  соответственно. Таким образом видно, что слагаемое с  $\Lambda t$  стремится вернуть систему к изотропному режиму (потому бездействует при изотропном распределении), а слагаемое с  $\lambda t$  отражает свойство (2.13) специального выбора собственных значений.

## 2.8 Усреднение по начальным направлениям завихренности

Для того, чтобы закончить усреднение (2.70) надо знать функцию распределения начальной завихренности  $f_0(\boldsymbol{\omega}) = f(0, \boldsymbol{\omega})$ . Не вдаваясь в нелинейные причины анизотропии распределения направления завихренности в базисе собственных векторов [80], предположим его некоторым произвольным эллипсоидальным:

$$f_0(\boldsymbol{\omega}) = f_{\omega_0} \left( \frac{\omega_1^2}{\alpha^2} + \frac{\omega_2^2}{\beta^2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma^2} \right) \quad (2.73)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad (2.74)$$

Начальные значения корреляторов  $\alpha_0^2$ ,  $\beta_0^2$  и  $\gamma_0^2$  определенные из эксперимента и численного расчета, позволяют определить параметры распределения  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  и  $\gamma^2$ , не конкретизируя функцию  $f_{\omega_0}$ . Действительно, запишем систему уравнений, связывающую начальные значения корреляторов с неизвестными параметрами:

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = \langle \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \rangle = \int \frac{\omega_1^2}{\omega^2} f_{\omega_0} \left( \frac{\omega_1^2}{\alpha^2} + \frac{\omega_2^2}{\beta^2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma^2} \right) \\ \beta_0^2 = \langle \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \rangle = \int \frac{\omega_2^2}{\omega^2} f_{\omega_0} \left( \frac{\omega_1^2}{\alpha^2} + \frac{\omega_2^2}{\beta^2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma^2} \right) \\ \gamma_0^2 = \langle \frac{\omega_3^2}{\omega^2} \rangle = \int \frac{\omega_3^2}{\omega^2} f_{\omega_0} \left( \frac{\omega_1^2}{\alpha^2} + \frac{\omega_2^2}{\beta^2} + \frac{\omega_3^2}{\gamma^2} \right) \end{cases}$$

Для взятия этих интегралов можно произвести замену, преобразующую эллипсоидальное распределение в изотропное и перейти к сферической системе координат:

$$\omega_1 = \alpha x, \quad \omega_2 = \beta y, \quad \omega_3 = \gamma z$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \\ y = r \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \\ z = r \mu \end{cases}$$

Тогда условие нормировки распределения запишется так:

$$4\pi\alpha\beta\gamma \int_0^{+\infty} f_{\omega_0}(r) r^2 dr = 1 \quad (2.75)$$

Поэтому независимость усредняемой величины от переменной  $r$  позволяет выразить  $\alpha_0^2$ ,  $\beta_0^2$  и  $\gamma_0^2$  для любого вида распределения  $f_{\omega_0}$  через эллиптические функции:

$$F = F \left( \arccos \frac{\gamma}{\beta}, \sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}} \right), \quad E = E \left( \arccos \frac{\gamma}{\beta}, \sqrt{\frac{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)}} \right)$$

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left( 1 + \frac{\gamma^2(\beta^2 - \alpha^2)F - \alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)E}{\alpha\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}(\alpha^2 - \gamma^2)} \right) \\ \beta_0^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - \gamma^2} \left( \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\beta^2 - \alpha^2} E \right) \\ \gamma_0^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \alpha^2} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} (E - F) \end{cases}$$

Решение этой системы не может быть записано в элементарных функциях, однако легко решается приближенно для любых конкретных значений начальных условий. Например, примем для начальных условий из [52; 53]:

$$\alpha_0^2 = 0.350, \quad \beta_0^2 = 0.385, \quad \gamma_0^2 = 0.265 \quad (2.76)$$

Тогда имеем следующие значения для параметров распределения:

$$\alpha^2 = 0.355, \quad \beta^2 = 0.42, \quad \gamma^2 = 0.225 \quad (2.77)$$

Таким образом, находя в каждом конкретном случае значения параметров распределения (2.73), можно получить численные значения коэффициентов в разложениях (2.70), (2.71) и (2.72) при  $\lambda t$  и  $\Lambda t$ .

## 2.9 Сравнение с экспериментом

Итак, произведя все необходимые усреднения, будем иметь вместо (2.70), (2.71) и (2.72) следующие выражения:

$$\alpha_t^2 \simeq 0.350 + 0.385\lambda t - 0.025\Lambda t \quad (2.78)$$

$$\beta_t^2 \simeq 0.385 - 0.030\lambda t - 0.085\Lambda t \quad (2.79)$$

$$\gamma_t^2 \simeq 0.265 - 0.355\lambda t + 0.110\Lambda t \quad (2.80)$$



Здесь  $\lambda = 3\sqrt{3/10\pi} (\varepsilon/r_0^2)^{1/3}$  (см. (2.14) и (2.15)), а  $\Lambda$  – подгоночный параметр того же порядка. Видно, что найденные значения параметров дают и рост  $\alpha_t^2$  (пируэт-эффект [52]), и перманентный медленный спад коррелятора  $\beta_t^2$  (также наблюдаемый в эксперименте и численном расчете [53]), и линейное убывание  $\gamma_t^2$  (см. [53]). Коэффициент корреляции  $\Lambda$  почти не влияет на рост  $\alpha_t^2$ . Таким образом, формула (2.78) для величины  $\alpha_t^2$  может быть количественно проверена из экспериментальных данных. Используя временной масштаб  $t_0 = (r_0^2/\varepsilon)^{1/3}$ , получаем универсальный рост коррелятора  $\alpha_t^2$ , наблюдаемый в [52]:

$$\alpha_t^2 \simeq 0.350 + 0.36t/t_0 \quad (2.81)$$

В рамках построенной модели можно также объяснить еще одно численно обнаруженное в [53] явление. Оказывается, что если тетраэдр сопутствует жидкой частице, сохраняя свою форму, то никакого характерного поведения завихренности для него не наблюдается. Действительно, в этом случае из тетраэдра постепенно «вытекает» жидкая частица, а ее место замещает другая жидкость. Растягивающаяся интенсифицирующая вихревая нить также частично выходит из жидкой частицы, поэтому длина нити  $l$  в тетраэдре остается постоянной. Таким образом, по теореме Гельмгольца:

$$\omega S_\omega l = \text{const} \quad (2.82)$$

где  $\omega$  – завихренность внутри вихревой нити, а  $S_\omega$  – площадь ее поперечного сечения. Как указывалось в **разд. 1**, именно эта величина сопоставляется в построенной модели крупномасштабной завихренности тетраэдра.

### Глава 3. Корреляции скорости и градиентов скорости

#### 3.1 Изотропный и несжимаемый двухточечный третий коррелятор скорости

Вкратце изложим классические результаты о двухточечном третьем корреляторе скорости в стационарном несжимаемом однородном и изотропном турбулентном потоке (далее просто *изотропный турбулентный поток*). Рассматривается соленоидальное (несжимаемое) случайное поле скорости  $\mathbf{v}$ , динамика которого определяется уравнениями Навье-Стокса со случайной внешней силой  $\mathbf{f}$ :

$$\frac{\partial v_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\partial(v_j(\mathbf{r},t)v_i(\mathbf{r},t))}{\partial x_j} - \frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i(\mathbf{r},t)}{\partial x_j \partial x_j} + f_i(\mathbf{r},t) \quad (3.1)$$

Сила считается гауссовой, дельта-коррелированной по времени, изотропной и крупномасштабной по пространству, причем средняя мощность накачки энергии этой силой

$$\varepsilon = \langle v_i(\mathbf{r},t) f_i(\mathbf{r},t) \rangle \quad (3.2)$$

предполагается постоянной и равной средней мощности диссипации энергии  $\nu \langle \left( \frac{\partial v_i(\mathbf{r},t)}{\partial x_j} \right)^2 \rangle$ . Можно показать, что в этом случае коррелятор силы должен определяться соотношением

$$\langle f_i(\mathbf{r},t) f_j(\mathbf{r} + \mathbf{b},t + \tau) \rangle = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \delta(\tau) \Phi(r/L), \quad (3.3)$$

где  $\Phi(0) = 1$ , а  $L \gg \eta_{Kolm} = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{3/4}$  – условие крупномасштабности. Рассмотрим двухточечный третий коррелятор (в дальнейшем мы будем рассматривать только одомоментную статистику, поэтому будем опускать обозначение зависимости от времени усредняемых величин):

$$\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = F_{ijk}(\mathbf{b}) \quad (3.4)$$

В силу однородности поля скорости,  $F_{ijk}$  не зависит от вектора  $\mathbf{r}$ .<sup>1</sup> Этот коррелятор обладает следующей тривиальной перестановочной симметрией:

$$\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r}) \rangle = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_k(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r}) \rangle \Rightarrow F_{ijk}(\mathbf{b}) = F_{ikj}(\mathbf{b}) \quad (3.5)$$

Взяв частную производную от  $\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})v_k(\mathbf{r}) \rangle$  по  $b_i$ , получим (в следствии уравнения непрерывности  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ):

$$\frac{\partial}{\partial b_i} F_{ijk}(\mathbf{b}) = 0 \quad (3.6)$$

Далее, из однородности и изотропии поля скорости следует, что трехиндексный тензор  $F_{ijk}$ , зависящий от одного направления, можно записать в явном виде как сумму четырех тензорных слагаемых:

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) = C(b)\delta_{jk}n_i + C_1(b)\delta_{ik}n_j + C_2(b)\delta_{ij}n_k + F(b)n_in_jn_k \quad (3.7)$$

Где  $C(b)$ ,  $C_1(b)$ ,  $C_2(b)$  и  $F(b)$  — скалярные функции, которые зависят только от модуля  $\mathbf{b}$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{b}$ . Применив (3.5) к последнему выражению, получим

$$C_1(b) = C_2(b) = D(b) \quad (3.8)$$

Для случая несжимаемой жидкости из (3.6), можно также получить связи между оставшимися скалярными функциями:

$$D(b) = -\frac{1}{2}bC'(b) - C(b) \quad (3.9)$$

$$F(b) = bC'(b) - C(b) \quad (3.10)$$

Таким образом,

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) = C(b)\delta_{jk}n_i - \left(\frac{1}{2}b \cdot C'(b) + C(b)\right)(\delta_{ik}n_j + \delta_{ij}n_k) + (b \cdot C'(b) - C(b))n_in_jn_k \quad (3.11)$$

Пусть  $\langle \delta v_L^2 \rangle$  — второй коррелятор продольного приращения скорости

$$\langle \delta v_L^2 \rangle = \langle (v_L(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_L(\mathbf{r}))^2 \rangle, \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>здесь мы либо предполагаем усреднение по времени в конкретной точке  $\mathbf{r}$ , которое из эргодической гипотезы равно усреднению по ансамблю, либо усредняем по набору точек с разными  $\mathbf{r}$  (то есть по пространству), что в силу однородности равно усреднению по ансамблю

где  $v_L = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  – проекция скорости на продольное направление  $\mathbf{b}$ . При учете (3.1) и (3.3) можно найти выражения для скалярной функций  $C(b)$ :

$$C(b) = \frac{1}{15}\varepsilon b - \frac{1}{2}\mathbf{v}\langle\delta v_L^2\rangle' \quad (3.13)$$

Подставив его в выражение для двухточечного тензора (3.11), получаем окончательное выражение для двухточечного тензора в изотропном несжимаемом турбулентном потоке:

$$\begin{aligned} F_{ijk}(\mathbf{b}) = & -\frac{1}{10}\varepsilon \cdot \delta_{ij}b_k - \frac{1}{10}\varepsilon \cdot \delta_{ik}b_j + \frac{1}{15} \cdot \varepsilon\delta_{jk}b_i + \\ & + \frac{\mathbf{v}}{4} \cdot \left( (2\langle\delta v_L^2\rangle' + b \cdot \langle\delta v_L^2\rangle'') (\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}r_j) - 2\langle\delta v_L^2\rangle' \cdot \delta_{jk}r_i + \right. \\ & \left. + (2\langle\delta v_L^2\rangle' - 2b \cdot \langle\delta v_L^2\rangle'')n_in_jn_k \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

которое в пределе  $\mathbf{v} \rightarrow 0$  дает

$$F_{ijk}(\mathbf{b}) \xrightarrow{\mathbf{v} \rightarrow 0} \frac{1}{15}\varepsilon\delta_{jk}b_i - \frac{1}{10}\varepsilon(\delta_{ik}b_j + \delta_{ij}b_k). \quad (3.15)$$

Поскольку изотропный турбулентный поток является недостижимой в эксперименте и численном счете идеализацией, то для проверки теоретических соотношений многоточечной статистики принято использовать понятие локально-изотропного турбулентного потока. В таком потоке предполагается, что только приращения скорости однородны и изотропны. Это предположение неплохо выполняется во многих развитых турбулентных потоках. Мы будем проверять полученные соотношения на данных численного расчета изотропной турбулентности, представленного университетом Джона Хопкинса в открытый доступ в интернет.

Введем обозначение аналогичное (3.12) для третьего коррелятора приращения скорости:

$$\langle\delta v_i\delta v_j\delta v_k\rangle = \langle(v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r})) (v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r})) (v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_k(\mathbf{r}))\rangle \quad (3.16)$$

Поскольку изотропный турбулентный поток, очевидно, является и локально-изотропным, то для вычисления (3.16) можно воспользоваться (3.14). Ненулевыми оказываются два третьих коррелятора приращения скорости  $\langle\delta v_L^3\rangle$

и  $\langle \delta v_L \delta v_T^2 \rangle$ , где  $L$  и  $T$  – это соответственно продольное и поперечное направления к вектору  $\mathbf{b}$ :

$$\langle \delta v_L^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon b + 6\nu \langle \delta v_L^2 \rangle' \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{4}{5}\varepsilon b \quad (3.17)$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T^2 \rangle = -\frac{4}{15}\varepsilon b + \nu \cdot (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{4}{15}\varepsilon b \quad (3.18)$$

Выражение (3.17) называется колмогоровским законом "четырёх пятых".

### 3.2 Смешанные двухточечные корреляторы и трехточечный коррелятор скорости

Введем стандартное обозначение для тензора градиентов скорости:

$$A_{il}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial r_l} v_i(\mathbf{r}, t). \quad (3.19)$$

Назовем смешанными совместные корреляторы скорости и тензора градиентов скорости, причем порядком смешанного коррелятора будем называть степень входящего туда тензора градиентов скорости. Зная выражение для двухточечного третьего коррелятора скорости, можно найти один смешанный двухточечный коррелятор первого порядка  $\langle A_{il}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle$ . Действительно,

$$\langle \frac{\partial}{\partial r_l} v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial b_l} v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial b_l} \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial b_l} F_{ijk}(\mathbf{b}) \quad (3.20)$$

Теперь подставив (3.14) в (3.20), получаем:

$$\begin{aligned} \langle A_{il}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = & -\frac{1}{10}\varepsilon (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) + \frac{1}{15}\varepsilon \delta_{il}\delta_{jk} + \\ & + \frac{\nu}{4b} \cdot \left( (2\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') \cdot (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}) - 2\langle \delta v_L^2 \rangle' \delta_{il}\delta_{jk} + \right. \\ & + (-2\langle \delta v_L^2 \rangle' + 2b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle''') \cdot (\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{ik}n_j n_l) + \\ & + (2\langle \delta v_L^2 \rangle' - 2b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') \cdot (\delta_{il}n_j n_k + \delta_{jk}n_i n_l + \delta_{jl}n_i n_k + \delta_{kl}n_i n_j) + \\ & \left. + (-6\langle \delta v_L^2 \rangle' + 6b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'' - 2b^2 \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle''') n_i n_j n_k n_l \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Легко видеть, что для нахождения других смешанных корреляторов недостаточно выражения для двухточечного тензора: необходимо немного „разъединить“ две совпадающие точки, чтобы найти производную одной из них. Введем поэтому трехточечный коррелятор:

$$\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle = X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (3.22)$$

В силу однородности поля скорости,  $X_{ijk}$  (как и  $F_{ijk}$ ) не зависит от вектора  $\mathbf{r}$ :<sup>2</sup>

$$\frac{\partial}{\partial r_l} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad (3.23)$$

Используя определение (3.22), запишем последнее условие следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r_l} \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3.24)$$

Внесем производную под знак среднего:

$$\langle \frac{\partial}{\partial r_l} v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle + \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})\frac{\partial}{\partial r_l} v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle + \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})\frac{\partial}{\partial r_l} v_k(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3.25)$$

Далее заменим производные по  $r_l$  на производные по  $b_l$  и  $a_l$ , где это возможно:

$$\langle \frac{\partial}{\partial b_l} v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle - \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})\frac{\partial}{\partial a_l} v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle + \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})\frac{\partial}{\partial r_l} v_k(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3.26)$$

Наконец, вынося за знак усреднения операторы производных по  $b_l$  и  $a_l$  (остальные скорости от них не зависят), получаем окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial b_l} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial a_l} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad (3.27)$$

Отсюда находим выражение для нового важного трехточечного коррелятора через  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ :

---

<sup>2</sup>в случае, если предполагается усреднение по времени в конкретной точке в (3.23) имеется в виду обычная производная, если же усреднение идет по пространству, то смещаем все точки ансамбля на одинаковый небольшой вектор  $\Delta \mathbf{r}$  и говорим о независимости тензора от такого смещения

$$Y_{ijkl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial a_i} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial b_i} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.28)$$

Тензор  $Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})$  дает выражение для смешанного двухточечного третьего коррелятора градиентов и скоростей первого порядка:

$$Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle \quad (3.29)$$

Обратим внимание, что для **точного** нахождения  $\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle$  необходимо знать не весь трехточечный тензор  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , а только его значение и значение его первой производной при  $\mathbf{a} = 0$ . Другими словами, надо знать *нулевой* и *первый* члены разложения тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  по параметру  $\mathbf{a}$ .<sup>3</sup> Тензора  $Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})$  позволяет также найти один двухточечный смешанный коррелятор второго порядка:

$$\langle A_{ip}(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial b_p} Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}). \quad (3.30)$$

Найдем теперь выражение для трехточечного смешанного коррелятора второго порядка:

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r} - \mathbf{a})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (3.31)$$

Для этого сделаем замену дифференцирования по  $r_p$  на  $a_p$  и вынесем его за знак усреднения:

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial a_p} Y_{ijkl}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (3.32)$$

Таким образом, для **точного** нахождения второго двухточечного смешанного коррелятора второго порядка

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle \quad (3.33)$$

необходимо знать *нулевой*, *первый* и *второй* члены разложения тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  по параметру  $a$ . Наконец, зная выражение для тензора  $Z_{ijpkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})$ , можно найти третий двухточечный коррелятор градиентов скорости (коррелятор третьего порядка):

$$\langle A_{iq}(\mathbf{r} + \mathbf{b})A_{jp}(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\partial}{\partial b_q} Z_{ijpkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}). \quad (3.34)$$

---

<sup>3</sup>это разложение существует, поскольку на малых масштабах скорости меняются гладко

Таким образом знание разложения тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  до второго порядка по параметру  $\mathbf{a}$  позволяет непосредственно находить все двухточечные смешанные третьи корреляторы скоростей и их градиентов, а также и третий двухточечный коррелятор пространственных производных поля скорости.

### 3.3 Метод нахождения членов разложения трехточечного тензора

В этом разделе мы найдем условия, которые сильно ограничивают класс возможных поправок первого и второго порядка малости по  $a$  в разложении тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

#### 3.3.1 Первое условие. Гладкий предельный переход.

Итак, пусть  $a$  – это малый масштаб, на котором скорости меняются гладко, допускающий поэтому и аналитическое разложение тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  по нему. Рассмотрим разложение тензора  $X_{ijk}$  по  $a$  до второго порядка малости.

$$X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a}) v_k(\mathbf{r}) \rangle = \underbrace{X_{ijk}^{(0)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{F_{ijk}(\mathbf{b})} + \underbrace{X_{ijk}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{a \cdot x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})} + \underbrace{X_{ijk}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{a^2 \cdot x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})} + o(a^2). \quad (3.35)$$

Здесь  $X_{ijk}^{(0)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F_{ijk}(\mathbf{b})$  – нулевой порядок разложения тензора, который очевидно совпадает с колмогоровским тензором и не зависит от вектора  $\mathbf{a}$ ,  $X_{ijk}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $X_{ijk}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – первый и второй порядки разложения соответственно, из которых делением на соответствующую степень длины вектора  $\mathbf{a}$  ( $a$  и  $a^2$ ) могут быть выделены тензорные составляющие, зависящие только от направления вектора  $\mathbf{a}$  (обозначим единичный вектор в направлении  $\mathbf{a}$  через  $\mathbf{m}$ ):  $x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$  и  $x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$ . Однако оказывается, что зависимость  $x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$  и  $x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$  от  $\mathbf{m}$  – произвольна и должна обеспечивать существование соответственно первой и второй производных тензора по этому направлению при  $\mathbf{a} = 0$ .



Найдем из (3.28) и (3.35) выражение для двухточечного коррелятора (3.29) через нулевой и первый порядки разложения тензора  $X_{ijk}$ :

$$Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = m_l \cdot x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_l} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) - \frac{\partial}{\partial b_l} F_{ijk}(\mathbf{b}). \quad (3.36)$$

Обратим внимание на то, что левая часть выражения (3.36) не зависит от вектора  $\mathbf{a}$ , в то время как правая, вообще говоря, зависит от его направления. Таким образом, первым условием на поправку  $X_{ijk}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  будет требование независимости выражения для  $Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})$  от  $\mathbf{a}$ :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a_p} \left( m_l \cdot x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_l} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) - \frac{\partial}{\partial b_l} F_{ijk}(\mathbf{b}) \right) = 0}. \quad (3.37)$$

Применяя к (3.35) определения (3.28) и (3.31), с учетом условия (3.37), можно аналогично найти выражение для двухточечного коррелятора (3.33) через нулевой, первый и второй порядки разложения (3.35)

$$Z_{ijpkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = 2\delta_{lp} \cdot x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + 2a_l \cdot \frac{\partial}{\partial a_p} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial a_p \partial a_l} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) - \frac{\partial}{\partial b_l} Y_{ijkp}(\mathbf{0}, \mathbf{b}). \quad (3.38)$$

Отсюда аналогично находим первое условие на поправку  $X_{ijk}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a_r} \left( 2\delta_{lp} \cdot x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + 2a_l \cdot \frac{\partial}{\partial a_p} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial a_p \partial a_l} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) \right) = 0}. \quad (3.39)$$

### 3.3.2 Второе условие. Перестановочная симметрия

Аналогично условию (3.5) для двухточечного тензора  $F_{ijk}$ , для трехточечного тензора  $X_{ijk}$  можно указать аналогичную перестановочную симметрию:<sup>4</sup>

<sup>4</sup>легко заметить, что имеется шесть перестановочных симметрий для трехточечного тензора  $X_{ijk}$ , однако требование малости  $a$  при произвольном значении  $b$  не позволяет использовать все из них в данной задаче

$$\begin{aligned} \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \rangle &= \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_k(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \rangle \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = X_{ikj}(-\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Условие (3.40) пока удобнее будет оставить в нераскрытом виде.

### 3.3.3 Третье условие. Несжимаемость

Наконец, условие несжимаемости потока также сильно ограничивает класс возможных поправок  $X_{ijk}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $X_{ijk}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Оно дает еще три условия на каждую из поправок. Действительно,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r_i} v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b_i} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad (3.41)$$

$$\left\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial r_j} v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a})v_k(\mathbf{r}) \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_j} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad (3.42)$$

$$\left\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial r_k} v_k(\mathbf{r}) \right\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial b_k} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \frac{\partial}{\partial a_k} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \quad (3.43)$$

Подставляя в эти условия разложение (3.35) и приравнивая соответствующие порядки малости, получаем следующие условия на тензоры  $x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$  и  $x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})$ :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial b_i} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = 0}, \quad (3.44)$$

$$\boxed{m_j \cdot x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_j} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = 0}, \quad (3.45)$$

$$\boxed{m_k \cdot x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial b_k} F_{ijk}(\mathbf{b})}, \quad (3.46)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial b_i} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = 0}, \quad (3.47)$$

$$\boxed{2m_j \cdot x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_j} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = 0}, \quad (3.48)$$

$$\boxed{2m_k \cdot x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) + a \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} x_{ijk}^{(2)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial b_k} x_{ijk}^{(1)}(\mathbf{m}, b, \mathbf{n})}. \quad (3.49)$$

### 3.4 Первый порядок разложения для трехточечного тензора

Введем обозначение  $\mu$  для косинуса угла между векторами  $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{m}$  и  $\mathbf{b} = b \cdot \mathbf{n}$ :

$$\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \quad (3.50)$$

С помощью него общий вид изотропного тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , разложенного до первого порядка по  $a$  может быть записан как:

$$\begin{aligned} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & C(b) \cdot \delta_{jk} n_i + D(b) \cdot \delta_{ij} n_k + D(b) \cdot \delta_{ik} n_j + F(b) \cdot n_i n_j n_k + \\ & + a \cdot \left( d_1(b, \mu) \delta_{ij} m_k + d_2(b, \mu) \delta_{ik} m_j + d_3(b, \mu) \delta_{jk} m_i + \right. \\ & + d_4(b, \mu) \delta_{ij} n_k + d_5(b, \mu) \delta_{ik} n_j + d_6(b, \mu) \delta_{jk} n_i + \\ & + f_1(b, \mu) m_i m_j m_k + \\ & + f_2(b, \mu) n_i n_j n_k + \\ & + e_1(b, \mu) m_i m_j n_k + e_2(b, \mu) m_i n_j m_k + e_3(b, \mu) n_i m_j m_k + \\ & \left. + e_4(b, \mu) n_i n_j m_k + e_5(b, \mu) n_i m_j n_k + e_6(b, \mu) m_i n_j n_k \right) + o(a), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где произвольные скалярные функции  $d_1(b, \mu) \dots e_6(b, \mu)$  не зависят от  $a$ . Условие (3.37) при подстановке и последующем занулении всех множителей при тензорных слагаемых дает следующие уравнения на эти функции:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial \mu} d_1(b, \mu) = 0 & d_4(b, \mu) - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d_4(b, \mu) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mu} d_2(b, \mu) = 0 & d_5(b, \mu) - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d_5(b, \mu) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mu} d_3(b, \mu) = 0 & d_6(b, \mu) - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d_6(b, \mu) = 0 \\ f_1(b, \mu) = 0 & f_2(b, \mu) - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} f_2(b, \mu) = 0 \\ e_1(b, \mu) = 0 & \frac{\partial}{\partial \mu} e_4(b, \mu) = 0 \\ e_2(b, \mu) = 0 & \frac{\partial}{\partial \mu} e_5(b, \mu) = 0 \\ e_3(b, \mu) = 0 & \frac{\partial}{\partial \mu} e_6(b, \mu) = 0. \end{array}$$

Таким образом, условие (3.37) сильно ограничивает зависимость скалярных функций от  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
d_1(b, \mu) &= d_1(b) & d_2(b, \mu) &= d_2(b) & d_3(b, \mu) &= d_3(b) \\
d_4(b, \mu) &= \mu \cdot d_4(b) & d_5(b, \mu) &= \mu \cdot d_5(b) & d_6(b, \mu) &= \mu \cdot d_6(b) \\
f_1(b, \mu) &= 0 \\
f_2(b, \mu) &= \mu \cdot f_2(b) \\
e_1(b, \mu) &= 0 & e_2(b, \mu) &= 0 & e_3(b, \mu) &= 0 \\
e_4(b, \mu) &= e_4(b) & e_5(b, \mu) &= e_5(b) & e_6(b, \mu) &= e_6(b),
\end{aligned}$$

где оставшиеся одноименные произвольные скалярные функции зависят уже только от аргумента  $b$ . Перепишем упрощенное таким образом выражение для тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned}
X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= C(b) \cdot \delta_{jk} n_i + D(b) \cdot \delta_{ij} n_k + D(b) \cdot \delta_{ik} n_j + F(b) \cdot n_i n_j n_k + \quad (3.52) \\
&+ a \cdot \left( d_1(b) \delta_{ij} m_k + d_2(b) \delta_{ik} m_j + d_3(b) \delta_{jk} m_i + \right. \\
&\quad + \mu \cdot d_4(b) \delta_{ij} n_k + \mu \cdot d_5(b) \delta_{ik} n_j + \mu \cdot d_6(b) \delta_{jk} n_i + \\
&\quad + \mu \cdot f_2(b) n_i n_j n_k + \\
&\quad \left. + e_4(b) n_i n_j m_k + e_5(b) n_i m_j n_k + e_6(b) m_i n_j n_k \right) + o(a).
\end{aligned}$$

Следующим шагом будет применение перестановочной симметрии (3.40) к последнему тензору. Записывая выражение для тензора в другой подстановке  $X_{ikj}(-\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ , вычисляем первый порядок разложения. Используем при этом разложения до первого порядка по  $a$  расстояния  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  и нулевой порядок для  $\tilde{\mu}$  (где  $\tilde{\mu}$  обозначен косинус угла между векторами  $-\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ):

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = b + a\mu + o(a) \quad (3.53)$$

$$\tilde{\mu} = \frac{-\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})}{a \cdot |\mathbf{a} + \mathbf{b}|} = -\mu + o(1) \quad (3.54)$$

Используя их, получаем следующее разложение для  $X_{ikj}(-\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned}
X_{ikj}(-\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) &= C(b) \cdot \delta_{jk} n_i + D(b) \cdot \delta_{ij} n_k + D(b) \cdot \delta_{ik} n_j + F(b) \cdot n_i n_j n_k + \\
&+ a \cdot \left( \left( \frac{D(b)}{b} - d_1(b) \right) \delta_{ik} m_j + \left( \frac{D(b)}{b} - d_2(b) \right) \delta_{ij} m_k + \left( \frac{C(b)}{b} - d_3(b) \right) \delta_{jk} m_i + \right. \\
&+ \mu \cdot \left( D'(b) - \frac{D(b)}{b} - d_4(b) \right) \delta_{ik} n_j + \mu \cdot \left( D'(b) - \frac{D(b)}{b} - d_5(b) \right) \delta_{ij} n_k + \\
&+ \mu \cdot \left( C'(b) - \frac{C(b)}{b} - d_6(b) \right) \delta_{jk} n_i - \\
&+ \mu \cdot \left( F'(b) - 3 \frac{F(b)}{b} - f_2(b) \right) n_i n_j n_k + \\
&\left. + \left( \frac{F(b)}{b} - e_4(b) \right) n_i n_k m_j + \left( \frac{F(b)}{b} - e_5(b) \right) n_i m_k n_j + \left( \frac{F(b)}{b} - e_6(b) \right) m_i n_j n_k \right) + o(a),
\end{aligned}$$

Теперь почленно приравнивая тензорные слагаемые первого порядка разложения тензоров  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $X_{ikj}(-\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ , получаем новые условия на скалярные функции:

$$(3.40) \Rightarrow \begin{cases} d_1(b) = \frac{D(b)}{b} - d_2(b) \\ d_3(b) = \frac{C(b)}{2b} \\ d_4(b) = D'(b) - \frac{D(b)}{b} - d_5(b) \\ d_6(b) = \frac{1}{2} C'(b) - \frac{C(b)}{2b} \\ f_2(b) = \frac{1}{2} F'(b) - \frac{3F(b)}{2b} \\ e_4(b) = \frac{F(b)}{b} - e_5(b) \\ e_6(b) = \frac{F(b)}{2b}. \end{cases}$$

Выражение для тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  в этой подстановке не представляет интереса и мы не будем его выписывать.

До сих пор наши рассуждения о первом порядке разложения  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  никак не использовали несжимаемость потока<sup>5</sup>. Учтем теперь несжимаемость потока. Для нулевого порядка несжимаемость дает известные выражения (3.9), (3.10):

$$\begin{cases} D(b) = -\frac{b}{2} C'(b) - C(b) \\ F(b) = b C'(b) - C(b). \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в выражение для тензора и применяя к нему следствия из уравнений непрерывности (3.44-3.46), мы получаем следующую дополнительную тройку уравнений:

<sup>5</sup>из последней системы видно, что в сжимаемом случае к трем произвольным скалярным функциям нулевого порядка ( $C(b)$ ,  $D(b)$  и  $F(b)$ ) добавляются три произвольные скалярные функции первого порядка ( $d_2(b)$ ,  $d_5(b)$  и  $e_5(b)$ ).

$$(3.44) \Rightarrow 2b^2 \cdot d_2'(b) - 2b \cdot d_5(b) + 2b^2 \cdot e_5'(b) + 4b \cdot e_5(b) = b^2 \cdot C''(b) + b \cdot C'(b) - C(b)$$

$$(3.45) \text{ или } (3.46) \Rightarrow \begin{cases} 4b \cdot d_2(b) + 2b \cdot d_5(b) = b \cdot C'(b) + C(b) \\ 2b \cdot d_5(b) - 4b \cdot e_5(b) = -b \cdot C'(b) + C(b) \end{cases}$$

Они ограничивают произвол в скалярных функциях первого порядка разложения до единственной функции, которую мы обозначим  $d(b)$ :

$$\begin{cases} e_5(b) = d(b) \\ d_2(b) = -d(b) + \frac{1}{2}C'(b) \\ d_5(b) = 2d(b) + \frac{1}{2b}C(b) - \frac{1}{2}C'(b) \end{cases}$$

Теперь выражение для тензора, зависящее всего от двух скалярных функций  $C(b)$  и  $d(b)$ , может быть записано в следующей, довольно громоздкой, форме:

$$\begin{aligned} X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & C(b)\delta_{jk}n_i - \left(\frac{b}{2}C'(b) + C(b)\right) (\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j) + & (3.55) \\ & + (b \cdot C'(b) - C(b)) n_i n_j n_k + \\ & + \frac{a}{b} \cdot \left( - (b \cdot C'(b) + C(b)) \delta_{ij}m_k + \frac{b}{2}C'(b)\delta_{ik}m_j + \frac{1}{2}C(b)\delta_{jk}m_i + \right. \\ & + \frac{\mu}{2} (C(b) - b \cdot C'(b) - b^2 \cdot C''(b)) \delta_{ij}n_k + \frac{\mu}{2} (C(b) - b \cdot C'(b)) \delta_{ik}n_j + \\ & + \frac{\mu}{2} (-C(b) + b \cdot C'(b)) \delta_{jk}n_i + \frac{\mu}{2} (4C(b) - 4b \cdot C'(b) + b^2 \cdot C''(b)) n_i n_j n_k + \\ & \left. + (-C(b) + b \cdot C'(b)) n_i n_j m_k + \frac{1}{2} (-C(b) + b \cdot C'(b)) m_i n_j n_k \right) + \\ & + a \cdot d(b) \cdot (\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k) + o(a). \end{aligned}$$

Это наиболее простой вид разложения тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  с учетом несжимаемости статистически изотропного потока. Подставив теперь на место  $C(b)$  следствие уравнений Навье-Стокса (3.13), мы получим выражение тензора через поток энергии  $\varepsilon$ , произвольную функцию  $d(b)$  и вторую продольную функцию (зависимость от последней стремится к нулю в пределе  $\mathbf{v} \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned}
X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = & -\frac{1}{10}\varepsilon \cdot \delta_{ij}b_k - \frac{1}{10}\varepsilon \cdot \delta_{ik}b_j + \frac{1}{15} \cdot \varepsilon \delta_{jk}b_i + \\
& + \frac{\nu}{4} \cdot \left( (2\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') (\delta_{ij}n_k + \delta_{ik}n_j) - \langle \delta v_L^2 \rangle' \cdot \delta_{jk}n_i + \right. \\
& \left. + (2\langle \delta v_L^2 \rangle' - 2b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') n_i n_j n_k \right) - \\
& - \frac{2}{15}\varepsilon \cdot \delta_{ij}a_k + \frac{1}{30}\varepsilon \cdot \delta_{ik}a_j + \frac{1}{30}\varepsilon \cdot \delta_{jk}a_i + \\
& + d(b) \cdot a \cdot (\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k) + \\
& + \frac{\nu a}{4b} \cdot \left( (2\langle \delta v_L^2 \rangle' + 2b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') \delta_{ij}m_k - \langle \delta v_L^2 \rangle'' \delta_{ik}m_j - \langle \delta v_L^2 \rangle' \delta_{jk}m_i + \right. \\
& + (\langle \delta v_L^2 \rangle' - b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') m_i n_j n_k + (2\langle \delta v_L^2 \rangle' - 2b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') n_i n_j m_k + \\
& + (-\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2 \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle''') \mu \delta_{ij}n_k + \\
& + (-\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'') (\mu \delta_{ik}n_j - \mu \delta_{jk}n_i) + \\
& \left. + (-3\langle \delta v_L^2 \rangle' + 3b \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle'' - b^2 \cdot \langle \delta v_L^2 \rangle''') \mu n_i n_j n_k \right) + o(a).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

В пределе  $\nu \rightarrow 0$  выражение (3.56) сильно упрощается:

$$\begin{aligned}
X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} & \frac{1}{15}\varepsilon \cdot \delta_{jk}b_i - \frac{1}{10}\varepsilon \cdot (\delta_{ik}b_j + \delta_{ij}b_k) - \\
& - \frac{1}{30}\varepsilon \cdot (\delta_{jk}a_i + \delta_{ik}a_j) + \frac{2}{15}\varepsilon \cdot \delta_{ij}a_k + \\
& + d(b) \cdot a \cdot (\delta_{ij}m_k - \delta_{ik}m_j + 2\mu\delta_{ik}n_j - 2\mu\delta_{ij}n_k + n_i m_j n_k - n_i n_j m_k) + o(a).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

### 3.5 О нахождении новой скалярной функции из уравнений движения

В этом разделе мы покажем, что для теоретического нахождения функции  $d(b)$  недостаточно уравнений на динамику вторых корреляторов.

#### 3.5.1 Динамика парного смешанного коррелятора

Рассмотрим уравнение динамики тензора градиентов скорости:

$$\frac{\partial A_{ij}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(v_k(\mathbf{r}, t)A_{ij}(\mathbf{r}, t))}{\partial x_k} - A_{ik}A_{kj} - \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \mathbf{v} \frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial f_i(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \quad (3.58)$$

Из него можно написать уравнение на динамику смешанного второго двухточечного коррелятора скорости и ее градиента. В силу стационарности турбулентности этот коррелятор не зависит от времени:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle A_{ij}(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle = \langle \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle + \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial t} \rangle = \quad (3.59) \\ &= -\langle v_k(\mathbf{r}) \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k} v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \langle A_{ik}(\mathbf{r}) A_{kj}(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \\ &\quad - \langle \frac{\partial^2 p(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle + \mathbf{v} \langle \frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k \partial x_k} v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle + \langle \frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial x_j} v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \\ &\quad - \langle A_{ij}(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \frac{\partial v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_k} \rangle - \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_l} \rangle + \\ &\quad + \mathbf{v} \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_k \partial x_k} \rangle + \langle A_{ij}(\mathbf{r}) f_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle \end{aligned}$$

Обратим внимание, что ввиду крупномасштабности силы  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , смешанные односточечные корреляторы, в которые она входит, могут быть оценены с помощью выражения (3.2) из теории размерности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \frac{\partial f_i(\mathbf{r})}{\partial x_j} v_l(\mathbf{r}) \rangle \\ \langle A_{ij}(\mathbf{r}) f_l(\mathbf{r}) \rangle \end{array} \right\} \propto \frac{\varepsilon}{L} \quad (3.60)$$

Из последней оценки следует, что эти корреляторы много меньше найденных трехточечных корреляторов. Это, очевидно, означает, что и двухточечными корреляторами, содержащими крупномасштабную силу  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  в выражении (3.59) можно пренебречь. Остальные слагаемые могут быть выражены через производные от третьих двухточечных корреляторов скорости и ее градиентов (3.4), (3.29) и (3.33), среднюю кинетическую энергию  $\frac{1}{2} \langle v^2 \rangle$  и парный коррелятор приращений скорости  $\langle \delta v_i \delta v_j \rangle$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial b_k} \underbrace{\langle v_k(\mathbf{r}) A_{ij}(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=Y_{ikij}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} - \underbrace{\langle A_{ik}(\mathbf{r}) A_{kj}(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=Z_{ikkj}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} - \quad (3.61) \\ &\quad - \frac{\partial^2}{\partial b_i \partial b_j} \underbrace{\langle p(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=0} - \mathbf{v} \frac{\partial^3}{\partial b_k \partial b_k \partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=\frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{il} - \frac{1}{2} \langle \delta v_i \delta v_l \rangle} - \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=-F_{ikl}(\mathbf{b})} + \frac{\partial^2}{\partial b_l \partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) p(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=0} + \\ &\quad - \mathbf{v} \frac{\partial^3}{\partial b_k \partial b_k \partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=\frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \delta_{il} - \frac{1}{2} \langle \delta v_i \delta v_l \rangle} \end{aligned}$$



Таким образом, используя (3.36) и (3.38), можно преобразовать исходное уравнение (3.59) к виду:

$$0 = -\frac{\partial^2}{\partial b_k \partial b_j} F_{ikl}(\mathbf{b}) - \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial b_j} X_{lik}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \underbrace{-\frac{\partial^2}{\partial b_k \partial a_j} X_{lik}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial a_j} X_{lik}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{=0} + \nu \frac{\partial^3}{\partial b_k \partial b_k \partial b_j} \langle \delta v_i \delta v_l \rangle \quad (3.62)$$

Видно, что хотя в итоговое уравнение и вошел второй порядок разложения трехточечного тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , он уходит в силу уравнения непрерывности (3.46). Подставив в (3.62) выражение (3.56), получаем тождество

$$0 \equiv 0 \quad (3.63)$$

Таким образом, выполнение (3.59) вытекает из непрерывности и закона Колмогорова, не давая ничего нового.

### 3.5.2 Динамика парного коррелятора градиентов скорости

Аналогичная ситуация возникает при попытке рассмотреть динамику парного двухточечного коррелятора градиентов скорости. Пренебрегая корреляторами, содержащими крупномасштабную силу  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ , имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle A_{ij}(\mathbf{r}) A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle = \left\langle \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial t} A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \right\rangle + \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial t} \rangle = \quad (3.64) \\ &= -\langle v_p(\mathbf{r}) \frac{\partial A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_p} A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \langle A_{ip}(\mathbf{r}) A_{pj}(\mathbf{r}) A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \\ &\quad - \langle \frac{\partial^2 p(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle + \nu \langle \frac{\partial^2 A_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_p \partial x_p} A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle - \\ &\quad - \langle A_{ij}(\mathbf{r}) v_p(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \frac{\partial A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_p} \rangle - \langle A_{ij}(\mathbf{r}) A_{kp}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) A_{pl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle + \\ &\quad - \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 p(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_k \partial x_l} \rangle + \nu \langle A_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b})}{\partial x_p \partial x_p} \rangle \end{aligned}$$

Аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем подразделе, уравнение (3.64) можно представить в виде дифференциального условия на смешанные трети корреляторы:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial^2}{\partial b_p \partial b_l} \underbrace{\langle v_p(\mathbf{r}) A_{ij}(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=Y_{kpij}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} - \frac{\partial}{\partial b_l} \underbrace{\langle A_{ip}(\mathbf{r}) A_{pj}(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=Z_{kippj}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} - \quad (3.65) \\
& - \frac{\partial^3}{\partial b_i \partial b_j \partial b_l} \underbrace{\langle p(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=0} - \nu \frac{\partial^4}{\partial b_p \partial b_p \partial b_j \partial b_l} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=\frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \delta_{ik} - \frac{1}{2}\langle \delta v_i \delta v_k \rangle} + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial b_p \partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_p(\mathbf{r} + \mathbf{b}) A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{Y_{ipkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} + \frac{\partial}{\partial b_j} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) A_{kp}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) A_{pl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{-Z_{ikppl}(\mathbf{0}, \mathbf{b})} + \\
& + \frac{\partial^3}{\partial b_j \partial b_k \partial b_l} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) p(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=0} - \nu \frac{\partial^4}{\partial b_p \partial b_p \partial b_j \partial b_l} \underbrace{\langle v_i(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \rangle}_{=\frac{1}{3}\langle v^2 \rangle \delta_{ik} - \frac{1}{2}\langle \delta v_i \delta v_k \rangle}
\end{aligned}$$

Используя следствия непрерывности потока:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial b_l \partial a_p \partial a_j} X_{kip}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\partial^3}{\partial b_l \partial b_p \partial a_j} X_{kip}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\
\frac{\partial^3}{\partial b_j \partial a_p \partial a_l} X_{ikp}^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \frac{\partial^3}{\partial b_j \partial b_p \partial a_l} X_{ikp}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})
\end{aligned}$$

можно и в этом случае избавиться от второго порядка разложения тензора  $X_{ijk}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ :

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\partial^3}{\partial b_p \partial b_l \partial a_j} X_{kip}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{\partial^3}{\partial b_l \partial b_p \partial a_j} X_{kip}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \quad (3.66) \\
& -\frac{\partial^3}{\partial b_l \partial a_p \partial b_j} X_{kip}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \frac{\partial^3}{\partial b_p \partial b_j \partial a_l} X_{ikp}^{(1)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \nu \frac{\partial^4}{\partial b_p \partial b_p \partial b_j \partial b_l} \langle \delta v_i \delta v_k \rangle
\end{aligned}$$

Подставив в (3.66) выражение (3.56), получаем тождество

$$0 \equiv 0 \quad (3.67)$$

Таким образом, выполнение (3.64) вытекает из непрерывности и закона Колмогорова, не давая ничего нового.

### 3.6 Смешанные двухточечные корреляторы первого порядка в локально-изотропной турбулентности

Подставив выражение (3.56) в (3.36) (или в (3.28)), можно найти еще один смешанный коррелятор первого порядка в случае изотропного турбулентного потока:

$$\begin{aligned}
\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle &= Y_{ijkl}(\mathbf{0}, \mathbf{b}) = \frac{2}{15}\varepsilon\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{30}\varepsilon\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{30}\varepsilon\delta_{il}\delta_{jk} + \quad (3.68) \\
&+ d(b) \cdot (-\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ik}n_jn_l - 2\delta_{ij}n_kn_l - \delta_{kl}n_in_j + \delta_{jl}n_in_k) + \\
&+ \frac{\gamma}{4b} \cdot \left( -2 \cdot (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle'')\delta_{ik}\delta_{jl} + b\langle \delta v_L^2 \rangle''\delta_{ij}\delta_{kl} + \langle \delta v_L^2 \rangle'\delta_{il}\delta_{jk} + \right. \\
&+ (\langle \delta v_L^2 \rangle' - b\langle \delta v_L^2 \rangle'' - b^2\langle \delta v_L^2 \rangle''')\delta_{ik}n_jn_l + \\
&+ (-\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle'')(-\delta_{ij}n_kn_l + \delta_{il}n_jn_k + \delta_{jk}n_in_l + 2\delta_{jl}n_in_k) + \\
&\left. + (3\langle \delta v_L^2 \rangle' - 3b\langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2\langle \delta v_L^2 \rangle''')n_in_jn_kn_l \right).
\end{aligned}$$

Для возможности проверки соотношений (3.21) и (3.68) в базе данных, остановимся на том, какие комбинации смешанных корреляторов первого порядка являются однородными и изотропными в локально-изотропном турбулентном потоке. Покажем, во-первых, что изотропны приращения  $\langle (v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r})) (v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r})) (A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - A_{kl}(\mathbf{r})) \rangle$  скоростей и градиентов скоростей. Для этого рассмотрим две точки (1) и (2) вблизи точки  $\mathbf{r}$ , такие что  $\mathbf{r}$  является серединой отрезка, соединяющего (1) и (2), а также две точки (3) и (4) расположенные аналогично вблизи  $\mathbf{r} + \mathbf{b}$ . Тогда,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \simeq (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) / 2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) \propto \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \simeq (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) / 2 \\ \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) \propto \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \end{array} \right.$$

Таким образом, изотропия приращений скорости и градиентов будет следовать из изотропии следующего четырехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned}
&\langle (v_{3i} + v_{4i} - v_{1i} - v_{2i})(v_{3j} + v_{4j} - v_{1j} - v_{2j})(v_{3k} - v_{4k} - v_{1k} + v_{2k}) \rangle = \\
&= \langle ((v_{3i} - v_{1i}) + (v_{4i} - v_{2i}))((v_{3j} - v_{1j}) + (v_{4j} - v_{2j}))((v_{3k} - v_{1k}) - (v_{4k} - v_{2k})) \rangle, \quad (3.69)
\end{aligned}$$

которая и выполняется в локально-изотропной турбулентности. Более того из изотропии следующего четырехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned} & \langle (v_{3i} + v_{4i} - v_{1i} - v_{2i})(v_{3j} + v_{4j} - v_{1j} - v_{2j})(v_{3k} - v_{4k} + v_{1k} - v_{2k}) \rangle = \\ & = \langle ((v_{3i} - v_{2i}) + (v_{4i} - v_{1i}))((v_{3j} - v_{2j}) + (v_{4j} - v_{1j}))((v_{3k} - v_{2k}) - (v_{4k} - v_{1k})) \rangle. \end{aligned} \quad (3.70)$$

следует, что коррелятор  $\langle (v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))(v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))(A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) + A_{kl}(\mathbf{r})) \rangle$  также является изотропным. Введем обозначения для найденных изотропных комбинаций:

$$\begin{aligned} \langle \delta v_i \delta v_j \delta A_{kl} \rangle &= \\ &= \langle (v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))(v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))(A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - A_{kl}(\mathbf{r})) \rangle \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta v_i \delta v_j \bar{\delta} A_{kl} \rangle &= \\ &= \langle (v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))(v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))(A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) + A_{kl}(\mathbf{r})) \rangle. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Из общих симметричных соотношений легко понять, что все корреляторы  $\langle \delta v_i \delta v_j \delta A_{kl} \rangle$  тождественные нули:

$$\langle (v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_i(\mathbf{r}))(v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - v_j(\mathbf{r}))(A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) - A_{kl}(\mathbf{r})) \rangle \equiv 0. \quad (3.73)$$

Подстановкой (3.21) и (3.68) в (3.72) получаем для корреляторов  $\langle \delta v_i \delta v_j \bar{\delta} A_{kl} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta v_i \delta v_j \bar{\delta} A_{kl} \rangle &= \quad (3.74) \\ &= 2(\langle A_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_i(\mathbf{r})v_j(\mathbf{r}) \rangle + \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_j(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle + \langle v_j(\mathbf{r} + \mathbf{b})v_i(\mathbf{r})A_{kl}(\mathbf{r}) \rangle) = \\ &= \frac{2}{15}\varepsilon \cdot (2\delta_{ij}\delta_{kl} - 3\delta_{ik}\delta_{jl} - 3\delta_{il}\delta_{jk}) + \\ &\quad + 2d(b) \cdot (-2\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \\ &\quad + 2n_in_j\delta_{kl} - n_in_k\delta_{jl} - 2n_in_l\delta_{jk} - n_jn_k\delta_{il} - 2n_jn_l\delta_{ik} + 4n_kn_l\delta_{ij}) + \\ &\quad + \frac{\gamma}{2b} \cdot \left( (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle'') \cdot (-2\delta_{ij}\delta_{kl} + 3\delta_{ik}\delta_{jl} + 3\delta_{il}\delta_{jk}) + \right. \\ &\quad + (\langle \delta v_L^2 \rangle' - b\langle \delta v_L^2 \rangle'') \cdot (2n_in_j\delta_{kl} + 5n_in_k\delta_{jl} + 5n_jn_k\delta_{il}) + \\ &\quad + (-\langle \delta v_L^2 \rangle' + b\langle \delta v_L^2 \rangle'' + b^2\langle \delta v_L^2 \rangle''') \cdot (2n_in_l\delta_{jk} + 2n_jn_l\delta_{ik}) + \\ &\quad \left. + (-12\langle \delta v_L^2 \rangle' + 12b\langle \delta v_L^2 \rangle'' - 4b^2\langle \delta v_L^2 \rangle''')n_in_jn_kn_l \right). \end{aligned}$$

Выпишем восемь ненулевых компоненты этого тензора (если в коррелятор входят два поперечных направления, то для второго направления вводится новое обозначение  $T'$ ):

$$\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle = -\frac{8}{15} \varepsilon + 4\nu \langle \delta v_L^2 \rangle'' \quad (3.75)$$

$$\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle = \frac{4}{15} \varepsilon + 4d(b) - \frac{\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \quad (3.76)$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T \bar{\delta} A_{TL} \rangle = -\frac{2}{5} \varepsilon - 2d(b) + \frac{\nu}{2b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + 5b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + 2b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''') \quad (3.77)$$

$$\langle \delta v_L \delta v_T \bar{\delta} A_{LT} \rangle = -\frac{2}{5} \varepsilon + \frac{\nu}{b} (4 \langle \delta v_L^2 \rangle' - b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \quad (3.78)$$

$$\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = \frac{4}{15} \varepsilon - 2\nu \langle \delta v_L^2 \rangle'' \quad (3.79)$$

$$\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = -\frac{8}{15} \varepsilon + \frac{2\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \quad (3.80)$$

$$\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{T'T'} \rangle = \frac{4}{15} \varepsilon - 4d(b) - \frac{\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \quad (3.81)$$

$$\langle \delta v_T \delta v_{T'} \bar{\delta} A_{TT'} \rangle = -\frac{2}{5} \varepsilon + 2d(b) + \frac{3\nu}{2b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle''). \quad (3.82)$$

Можно составить несколько нулевых комбинаций из этих корреляторов. Например, из несжимаемости потока:

$$\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle + 2 \langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = 0 \quad (3.83)$$

$$\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle + \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle + \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{T'T'} \rangle = 0 \quad (3.84)$$

Назовем нулевые комбинации (3.83) и (3.84) *тривиальными*, поскольку для их выполнения не требуется ни условия статистической однородности или изотропии потока<sup>6</sup>, ни динамических соображений. Таким образом они не дают новой содержательной информации об изотропной турбулентности.

Также можно составить две другие линейно-независимые нулевые комбинации, которые не будут прямым следствием несжимаемости:

$$\frac{2}{\sqrt{6}} \langle \delta v_T \delta v_{T'} \bar{\delta} A_{TT'} \rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{T'T'} \rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = 0 \quad (3.85)$$

$$\frac{8}{\sqrt{105}} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle - \frac{4}{\sqrt{105}} \langle \delta v_L \delta v_T \bar{\delta} A_{LT} \rangle - \frac{5}{\sqrt{105}} \langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle = 0 \quad (3.86)$$

Коэффициенты при корреляторах для дальнейшего удобства нормированы так, чтобы сумма их квадратов была равна единице. Нулевые комбинации

<sup>6</sup>в выражении (3.83) все же использовано очевидное следствие изотропии

$$\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = \langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{T'T'} \rangle$$

(3.85) и (3.86) назовем *изотропными*, поскольку для их получения, очевидно, необходимы условия изотропии потока. Такое название будем давать и в дальнейшем подобным комбинациям при рассмотрении других корреляторов.

Четыре оставшихся независимых точных соотношения для смешанных корреляторов первого порядка можно также разбить на две пары, где первая пара (3.75) и (3.80) зависит только от потока энергии  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle &= -\frac{8}{15} \varepsilon + 4\nu \langle \delta v_L^2 \rangle'' \\ \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle &= -\frac{8}{15} \varepsilon + \frac{2\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle''),\end{aligned}$$

а вторая пара (3.76) и (3.77) также и от неизвестной функции  $d(b)$ :

$$\begin{aligned}\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle &= \frac{4}{15} \varepsilon + 4d(b) - \frac{\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \\ \langle \delta v_L \delta v_T \bar{\delta} A_{TL} \rangle &= -\frac{2}{5} \varepsilon - 2d(b) + \frac{\nu}{2b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + 5b \langle \delta v_L^2 \rangle'' + 2b^2 \langle \delta v_L^2 \rangle''').\end{aligned}$$

Таким образом, выражения (3.75) для  $\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle$  и (3.80) для  $\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle$  представляют из себя новые точные законы локально-изотропной турбулентности, допускающие экспериментальную и численную проверку. Выражения (3.76) для  $\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle$  и (3.77) для  $\langle \delta v_L \delta v_T \bar{\delta} A_{TL} \rangle$  позволяют определить неизвестную скалярную функцию  $d(b)$  путем обработки численных данных. Например, можно найти функцию  $d(b)$  с помощью выражения

$$\boxed{d(b) = \frac{1}{4} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle + \frac{1}{8} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle}, \quad (3.87)$$

использующего (3.76).

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Численно обнаружено вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке. Аналитически показано, что наличие вырождения означает универсальность функции распределения отношения собственных значений тензора.
2. Найдена лог-нормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора скоростей деформации. При этом оба параметра определяются отдельно. Произведено численное определение параметров аппроксимации. **Проверить универсальность**
3. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. Показано, что линейные эффекты, возможно, играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
4. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода сильно ограничено количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть первые два члена разложения трехточечного тензора по расстоянию между двумя точками - до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции определяются численно.
5. На основании сравнения численных данных двух различных симуляций изотропного турбулентного потока обнаружено, что одна из не определенных аналитически скалярная функция является универсальной константой, зависящей только от плотности потока энергии  $\varepsilon$ .

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Зыбину К. П. за постановку интересных задач, поддержку, обсуждение результатов и научное руководство. Автор благодарит авторов шаблона \*Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template\* за помощь в оформлении НКР.

## Список литературы

1. *Reynolds, O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinous, and the law of resistance in parallel channels / O. Reynolds // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1883. — Vol. 174. — P. 935—982.
2. *Reynolds, O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion / O. Reynolds // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1894. — Vol. 186. — P. 123—161.
3. *Keller, L. V.* Differentialgleichung fur die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flussigkeit / L. V. Keller, A. A. Friedman // *Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics.* — 1924. — P. 395—405.
4. *Taylor, G. I.* Statistical theory of turbulence / G. I. Taylor // *Proc. R. Soc. Lond. A.* — 1935. — No. 151. — P. 421—444.
5. *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // *Докл. АН СССР.* — 1941. — Т. 4, № 30. — С. 299—303.
6. *Монин, А. С.* Статистическая гидромеханика. Часть 2 / А. С. Монин, А. М. Яглом. — Москва : Наука, 1967. — 720 с.
7. *Фриш, У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 343 с.
8. *Волков, К. Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений / К. Н. Волков, Е. Н. Емельянов. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с.
9. *Колмогоров, А. Н.* Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности / А. Н. Колмогоров // *Докл. АН СССР.* — 1941. — Т. 1, № 32. — С. 19—21.
10. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow / F. Anselmet [et al.] // *J. Fluid Mech.* — 1984. — Vol. 140. — P. 63—89.
11. *Кузнецов, В. Р.* Турбулентность и горение / В. Р. Кузнецов, В. А. Сабельников. — Москва : Наука, 1986. — 288 с.



12. *Parisi, G.* On the singularity structure of fully developed turbulence / G. Parisi, U. Frisch // Turbulence and predictability of geophysical fluid dynamics / ed. by M. Ghil, R. Benzi, G. Parisi. — Amsterdam : North-Holland, 1985. — P. 84—87.
13. On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems / R. Benzi [et al.] // J. Phys. A: Math. Gen. — 1984. — No. 17. — P. 3521.
14. Генерация мелкомасштабных структур в развитой турбулентности / К. П. Зыбин [и др.] // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 132, 2 (8). — С. 510—523.
15. Lagrangian Statistical Theory of Fully Developed Hydrodynamical Turbulence / K. P. Zybin [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 174504.
16. *Zybin, K. P.* Structure functions of fully developed hydrodynamic turbulence: An analytical approach / K. P. Zybin, V. A. Sirota, A. S. Ilyin // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 056324.
17. *Zybin, K. P.* Multifractal structure of fully developed turbulence / K. P. Zybin, V. A. Sirota // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88. — P. 043017.
18. *Зыбин, К. П.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности / К. П. Зыбин, В. А. Сирота // УФН. — 2015. — Т. 185, № 6. — С. 593—612.
19. *Taylor, G. I.* Production and Dissipation of Vorticity in a Turbulent Fluid / G. I. Taylor // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1937. — No. 164. — P. 15—23.
20. *Batchelor, G. K.* The nature of turbulent motion at large wave-numbers / G. K. Batchelor, A. A. Townsend // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1949. — No. 199. — P. 238—255.
21. The structure of intense vorticity in isotropic turbulence / J. Jimenez [et al.] // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 255. — P. 65—90.
22. *Kholmyansky, M.* On an alternative explanation of anomalous scaling and how well-defined is the concept of inertial range / M. Kholmyansky, A. Tsinober // Physics Letters A. — 2009. — No. 373. — P. 2364—2367.
23. *Yaglom, A. M.* On the local structure of a temperature field in a turbulent flow / A. M. Yaglom // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1949. — Vol. 69. — P. 743.

24. *Novikov, E. A.* Functionals and the random-force method in turbulence theory / E. A. Novikov // Sov. Phys. JETP. — 1965. — Vol. 20. — P. 1290.
25. *Monin, A. S.* Theory of locally isotropic turbulence / A. S. Monin // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1959. — Vol. 125. — P. 515.
26. *Hill, R. J.* Applicability of Kolmogorov's and Monin's equations of turbulence / R. J. Hill // J. Fluid Mech. — 1997. — Vol. 353. — P. 67.
27. *Nie, Q.* A note on third-order structure functions in turbulence / Q. Nie, S. Tanveer // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1999. — Vol. 455. — P. 1615.
28. *Chandrasekhar, S.* The invariant theory of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics / S. Chandrasekhar // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1951. — Vol. 204. — P. 435.
29. *Politano, H.* Von Karman - Howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions / H. Politano, A. Pouquet // Phys. Rev. E. — 1998. — Vol. 57. — R21.
30. *Podesta, J. J.* Laws for third-order moments in homogeneous anisotropic incompressible magnetohydrodynamic turbulence / J. J. Podesta // J. Fluid. Mech. — 2008. — Vol. 609. — P. 171.
31. *Chkhetiani, O. G.* On the third moments in helical turbulence / O. G. Chkhetiani // JETP Lett. — 1996. — Vol. 63. — P. 808.
32. *Gomez, T.* Exact relationship for third-order structure functions in helical flows / T. Gomez, H. Politano, A. Pouquet // Phys. Rev. E. — 2000. — Vol. 61 (5). — P. 5321.
33. *Falkovich, G.* New relations for correlation functions in Navier-Stokes turbulence / G. Falkovich, I. Fouxon, Y. Oz // J. Fluid Mech. — 2010. — Vol. 644. — P. 465.
34. *Galtier, S.* Exact relation for correlation functions in compressible isothermal turbulence / S. Galtier, S. Banerjee // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 107. — P. 134501.
35. *Banerjee, S.* Exact relation with two-point correlation functions and phenomenological approach for compressible magnetohydrodynamic turbulence / S. Banerjee, S. Galtier // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 87. — P. 013019.

36. *Banerjee, S.* A Kolmogorov-like exact relation for compressible polytropic turbulence / S. Banerjee, S. Galtier // J. Fluid Mech. — 2014. — Vol. 742. — P. 230.
37. *Fouxon, I.* Exact scaling relations in relativistic hydrodynamic turbulence / I. Fouxon, Y. Oz // Phys. Lett. B. — 2010. — Vol. 694. — P. 261.
38. *Karman, T.* On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence / T. Karman, L. Howarth // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1938. — No. 164. — P. 192—215.
39. *Falkovich, G.* Particles and fields in fluid turbulence / G. Falkovich, K. Gawedski, M. Vergassola // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 73. — P. 913—975.
40. *Il'yn, A. S.* Statistical properties of the T-exponential of isotropically distributed random matrices / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // J. Stat. Phys. — 2016. — Vol. 163. — P. 765.
41. *Il'yn, A. S.* Passive scalar transport by a non-Gaussian turbulent flow in the Batchelor regime / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96. — P. 013117.
42. *Il'yn, A. S.* Small-scale turbulent magnetic field: Growth vs. decay / A. S. Il'yn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // Europhysics Letters. — 2018. — Vol. 121. — P. 34002.
43. *Kazantsev, A. P.* Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid / A. P. Kazantsev // Sov. Phys. JETP. — 1968. — Vol. 26. — P. 1031.
44. *Kraichnan, R. H.* Growth of turbulent magnetic fields / R. H. Kraichnan, S. Nagarajan // Phys. Fluids. — 1967. — Vol. 10. — P. 859.
45. *Vergassola, M.* Anomalous scaling for passively advected magnetic fields / M. Vergassola // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 53(4). — R3021.
46. *Kopyev, A. V.* Degeneracy of velocity strain-rate tensor statistics in random isotropic incompressible flows / A. V. Kopyev // Phys. Rev. Fluids. — 2018. — Vol. 3. — P. 024603.
47. *Kopyev, A. V.* Exact result for mixed triple two-point correlations of velocity and velocity gradients in isotropic turbulence / A. V. Kopyev, K. P. Zybin // Journal of Turbulence. — 2018. — Vol. 19, no. 9. — P. 717—730.

48. *Зыбин, К. П.* К вопросу о модели возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке / К. П. Зыбин, А. В. Копьев // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — Т. 4. — С. 41—59.
49. *Копьев, А. В.* XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике / А. В. Копьев // Краткие аннотации выступлений. — 2017.
50. *Копьев, А. В.* Материалы XXIII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» / А. В. Копьев, К. П. Зыбин //. — 2018.
51. *Копьев, А. В.* Всероссийская конференция молодых ученых-механиков / А. В. Копьев, К. П. Зыбин // Тезисы докладов. — 2018.
52. *Xu, H.* The pirouette effect in turbulent flows / H. Xu, A. Pumir, E. Bodenschatz // Nat. Phys. — 2011. — No. 7. — P. 709—712.
53. *Pumir, A.* Tetrahedron deformation and alignment of perceived vorticity and strain in a turbulent flow / A. Pumir, E. Bodenschatz, H. Xu // Phys. Fluids. — 2013. — Vol. 25. — P. 035101.
54. *Chertkov, M.* Lagrangian Tetrad Dynamics and the Phenomenology of Turbulence / M. Chertkov, A. Pumir, B. I. Shraiman // Phys. Fluids. — 1999. — Vol. 11. — P. 2394—2410.
55. *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — Москва : Наука, 1973. — 848 с.
56. *Ландау, Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 736 с.
57. *Chevillard, L.* Lagrangian time correlations of vorticity alignments in isotropic turbulence observations and model predictions / L. Chevillard, C. Meneveau // Phys. Fluids. — 2011. — Vol. 23. — P. 101704.
58. *Hamlington, P. E.* Local and nonlocal strain rate fields and vorticity alignment in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77. — P. 026303.
59. *Hamlington, P. E.* Direct assessment of vorticity alignment with local and nonlocal strain rates in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20. — P. 111703.

60. *Il'yn, A. S.* Material deformation tensor in time-reversal symmetry breaking turbulence / A. S. Il'yn, K. P. Zybin // *Phys. Letters A.* — 2015. — Vol. 379. — P. 650.
61. *Kerr, R. M.* Histograms of helicity and strain in numerical turbulence / R. M. Kerr // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 59, no. 7. — P. 783.
62. Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier–Stokes turbulence / W. T. Ashurst [et al.] // *Phys. Fluids.* — 1987. — Vol. 30, no. 8. — P. 2343.
63. *Lund, T. S.* An improved measure of strain state probability in turbulent flows / T. S. Lund, M. M. Rogers // *Phys. Fluids.* — 1994. — Vol. 6, no. 5. — P. 1839.
64. *Tsinober, A.* Experimental investigation of the field of velocity gradients in turbulent flows / A. Tsinober, E. Kit, T. Dracos // *J. Fluid Mech.* — 1992. — Vol. 242. — P. 169.
65. *Buxton, O. R. H.* The effects of resolution and noise on kinematic features of fine-scale turbulence / O. R. H. Buxton, S. Laizet, B. Ganapathisubramani // *Exp. Fluids.* — 2011. — Vol. 51, no. 5. — P. 1417.
66. A study of the evolution and characteristics of the invariants of the velocity-gradient tensor in isotropic turbulence / A. Ooi [et al.] // *J. Fluid. Mech.* — 1999. — Vol. 381. — P. 141.
67. *Gomes-Fernandes, R.* Evolution of the velocity-gradient tensor in a spatially developing turbulent flow / R. Gomes-Fernandes, B. Ganapathisubramani, J. C. Vassilicos // *J. Fluid. Mech.* — 2014. — No. 756. — P. 252—292.
68. *Luthi, B.* Lagrangian measurement of vorticity dynamics in turbulent flow / B. Luthi, A. Tsinober, W. Kinzelbach // *J. Fluid. Mech.* — 2005. — Vol. 528. — P. 87.
69. Velocity and temperature derivatives in high-Reynolds-number turbulent flows in the atmospheric surface layer. Part 1. Facilities, methods and some general results / G. Gulitski [et al.] // *J. Fluid. Mech.* — 2007. — Vol. 589. — P. 57.
70. A study of the finescale motions of incompressible time-developing mixing layers / J. Soria [et al.] // *Phys. Fluids.* — 1994. — Vol. 6. — P. 871.

71. *She, Z.-S.* Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations / Z.-S. She, E. Jackson, S. A. Orszag // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1991. — Vol. 434. — P. 101.
72. *Weyl, H.* The Classical Groups. Their Invariants and Representations / H. Weyl. — Princeton Univ. Press, 1939.
73. A public turbulence database cluster and applications to study Lagrangian evolution of velocity increments in turbulence / Y. Li [et al.] // Journal of Turbulence. — 2008. — Vol. 9, no. 31. — P. 2008.
74. Data Exploration of Turbulence Simulations using a Database Cluster / E. Perlman [et al.] // Supercomputing. — 2007. — Vol. SC07.
75. *Ширяев, А. Н.* Вероятность – 1 / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, 2004. — 574 с.
76. *Кляцкин, В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В. И. Кляцкин. — Москва : Наука, 1980. — 336 с.
77. *Владимиров, В.* Уравнения математической физики / В. Владимиров. — Москва : Наука, 1981. — 512 с.
78. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. — Москва : КДУ, 2008. — 408 с.
79. *Wallace, J. M.* Twenty years of experimental and direct numerical simulation access to the velocity gradient tensor: What have we learned about turbulence? / J. M. Wallace // Phys. Fluids. — 2009. — No. 21. — P. 021301.
80. *Cantwell, B. J.* Exact solution of a restricted Euler equation for the velocity gradient tensor / B. J. Cantwell // Phys. Fluids A. — 1992. — Vol. 4. — P. 782—793.
81. *Shtilman, L.* On some kinematic versus dynamic properties of homogeneous turbulence / L. Shtilman, M. Spector, A. Tsinober // J. Fluid. Mech. — 1993. — No. 247. — P. 65.
82. *Мета, М. Л.* Случайные матрицы / М. Л. Мета. — Москва : МЦНМО, 2012. — 648 с.
83. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — Москва : Наука, 1984. — 831 с.

## Приложение А

### Функции распределения различных инвариантов и соотношения между ними

В этом разделе приведена таблица аналитических соотношений между функциями распределения инвариантов тензора и самого тензора скоростей деформации.

#### А.1 Функция распределения собственных значений тензора

$$f_S\{\sigma\} = f_S^{Q_S R_S} \left( -\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}, -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \right) = \quad (\text{A.1})$$

$$= f_S^{\lambda_1 \lambda_3} (\lambda_1\{\sigma\}, \lambda_3\{\sigma\}). \quad (\text{A.2})$$

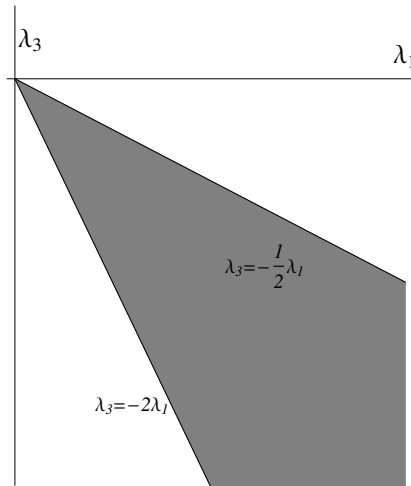


Рисунок А.1 — Область определения максимального собственного значения  $\lambda_1$  и минимального собственного значения  $\lambda_3$  тензора скоростей деформации.

$$f_{\lambda_1 \lambda_3}(x, y) = \quad (\text{A.3})$$

$$= 2\pi^2 |(x - y)(2x + y)(x + 2y)| f_S^{\lambda_1 \lambda_3}(x, y). \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Функция распределения следов степеней тензора

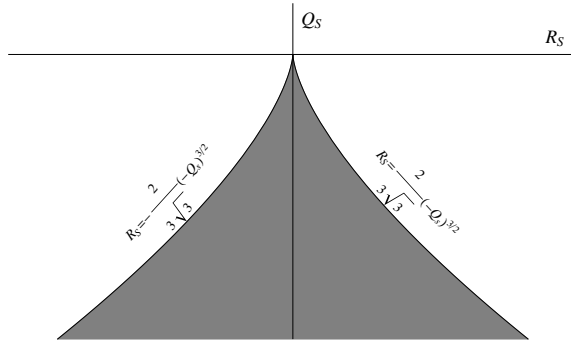


Рисунок A.2 —  $D_{Q_S R_S}$ : область определения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$ .

$$f_{\lambda_1 \lambda_3}(x, y) = |(x - y)(2x + y)(x + 2y)| \times f_{Q_S R_S}(- (x^2 + xy + y^2), xy(x + y)), \quad (\text{A.5})$$

$$f_{Q_S R_S}(q, r) = 2\pi^2 \cdot f_S^{Q_S R_S}(q, r). \quad (\text{A.6})$$

$$f_S\{\sigma\} = \frac{1}{2\pi^2} \cdot f_{Q_S R_S}\left(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji}, -\frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}\right). \quad (\text{A.7})$$

## A.3 Функция распределения введенных инвариантов

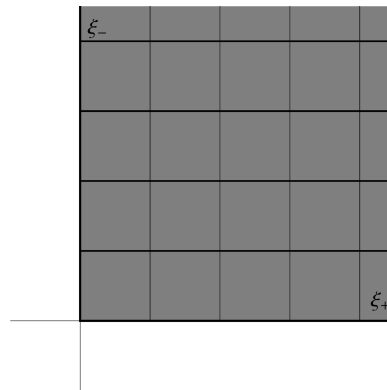


Рисунок A.3 — Область распределения инвариантов  $\xi_+$  и  $\xi_-$ .



$$f_{Q_S R_S}(q, r) = \frac{9\sqrt{3}}{2} (-q)^{1/2} \cdot f_{\xi_+ \xi_-} \left( (-q)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} r, (-q)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} r \right), \quad (\text{A.8})$$

$$f_{\xi_+ \xi_-}(x_+, x_-) = \frac{2^{4/3}}{9\sqrt{3}(x_+ + x_-)^{1/3}} \cdot f_{Q_S R_S} \left( -\frac{1}{2^{2/3}} (x_+ + x_-)^{2/3}, \frac{1}{3\sqrt{3}} (x_+ - x_-) \right). \quad (\text{A.9})$$

#### A.4 Функции распределения нормированных собственных значений тензора

$$f_s(z) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{2z}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt, \quad (\text{A.10})$$

где  $z \in [-1; 1]$ .

$$f_\beta(z) = \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - z^2) \int_0^{+\infty} f_{Q_S R_S} \left( -t^2, t^3 \frac{z(3-z^2)}{3\sqrt{3}} \right) t^4 dt, \quad (\text{A.11})$$

где  $z \in [-1; 1]$ .

## Приложение Б

### Вычисления для гауссовой статистики

В статье [81] показано, что в случае изотропного несжимаемого гауссового поля скорости компоненты тензора скоростей деформации распределены следующим образом:

$$f_S\{\sigma\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{5}{2\pi\langle\omega^2\rangle} \right)^{5/2} \exp \left[ -\frac{5}{2\langle\omega^2\rangle} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \right], \quad (\text{Б.1})$$

где  $\langle\omega^2\rangle$  средний квадрат завихренности течения. Подставляя последнее выражение в (А.3) получаем выражение для функции распределения собственных значений тензора (см. рисунок Б.1):

$$f_{\lambda_1\lambda_3}(x,y) = \frac{\sqrt{3}A}{2} \left( \frac{5}{2\pi\langle\omega^2\rangle} \right)^{5/2} |(x-y)(2x+y)(x+2y)| \times \exp \left[ -\frac{5}{2\langle\omega^2\rangle} (x^2 + xy + y^2) \right]. \quad (\text{Б.2})$$

Далее из (А.6) можно найти функцию распределения  $Q_S$  и  $R_S$  (см. рисунок Б.2):

$$f_{Q_S R_S}(q,r) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left( \frac{5}{2\langle\omega^2\rangle} \right)^{5/2} \exp \left[ \frac{5}{2\langle\omega^2\rangle} q \right]. \quad (\text{Б.3})$$

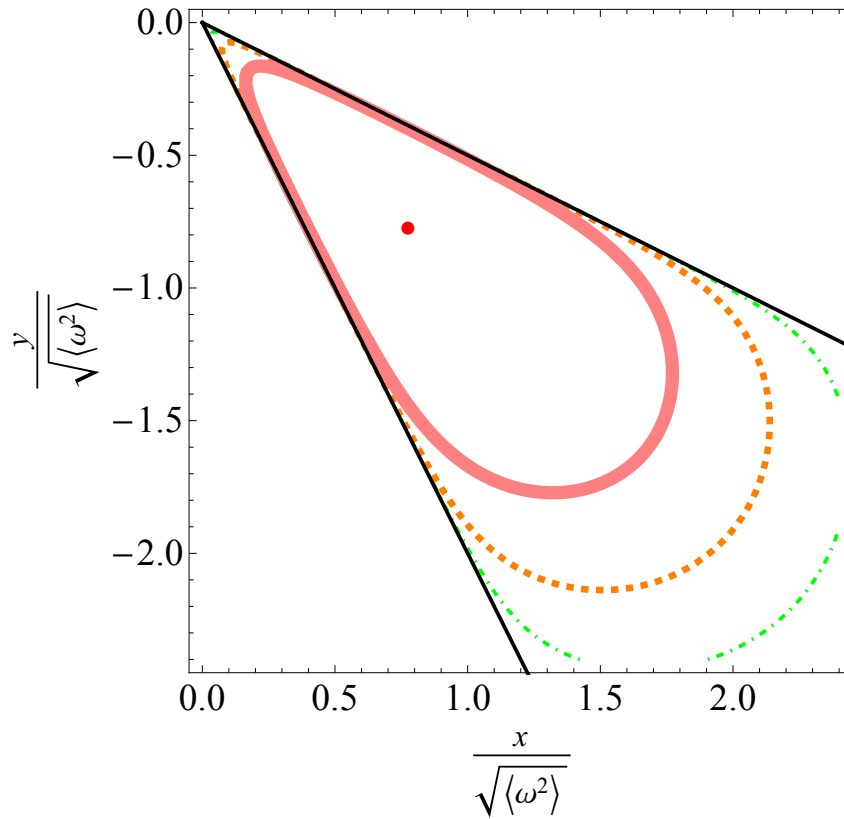


Рисунок Б.1 — Функция распределения собственных значений в гауссовом случае. Максимальное значение функции (красная точка) для  $\langle \omega^2 \rangle = 125$  примерно  $1.6 \times 10^{-2}$ . Оси обезразмерены делением на  $\langle \omega^2 \rangle$  в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функции универсальны. Различие между линиями уровня составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции),  $-1$  для розового жирного контура,  $-2$  для оранжевого пунктирного и  $-3$  для зеленого штрих-пунктирного.

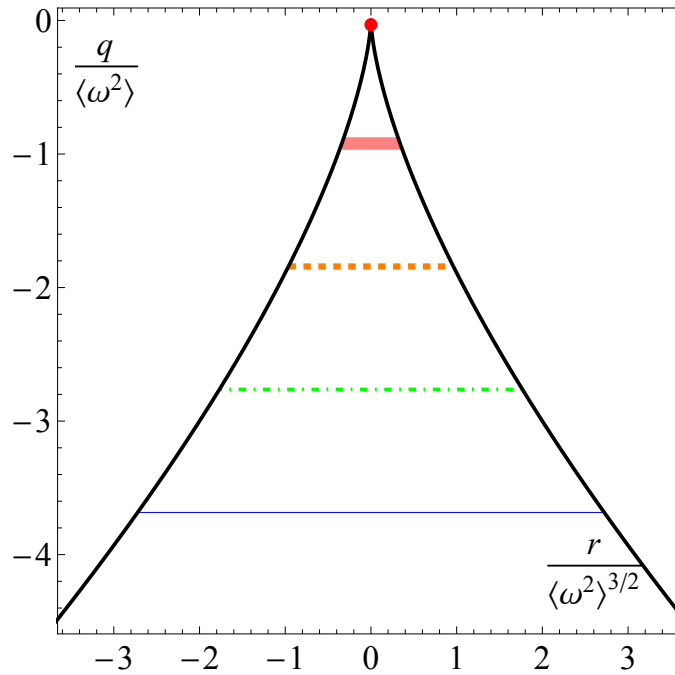


Рисунок Б.2 — Функция распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$  в гауссовом случае. Максимальное значение функции (красная точка) для  $\langle \omega^2 \rangle = 125$  примерно  $5.5 \times 10^{-5}$ . Оси обезразмерены делением на  $\langle \omega^2 \rangle$  в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функции универсальны. Различие между линиями уровня составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции),  $-1$  для розового жирного контура,  $-2$  для оранжевого пунктирного,  $-3$  для зеленого штрих-пунктирного и  $-4$  для синего тонкого.

## Приложение В

## Аппроксимация «JHTDB-распределения»

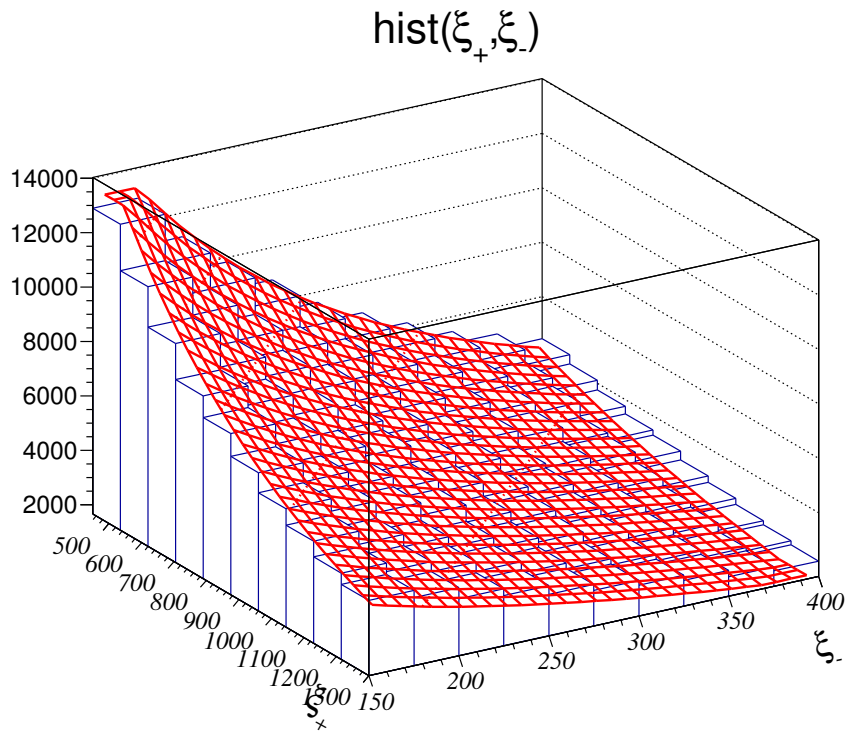


Рисунок В.1 — Сравнение гистограммы  $\xi_+$  и  $\xi_-$  «JHTDB-распределения» (синие колонки) и аппроксимации (красная поверхность)

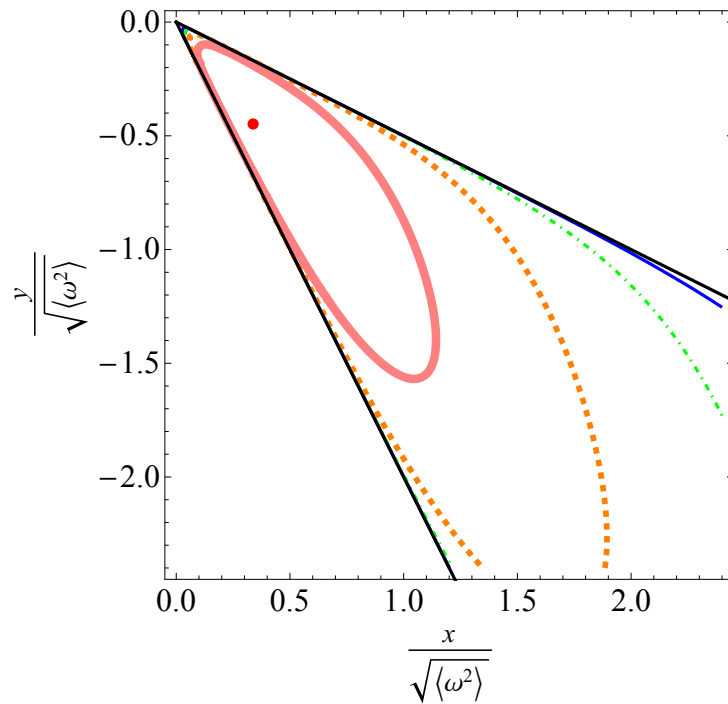


Рисунок В.2 — Аппроксимация функции распределения собственных значений в «JHTDB-распределении».  $\langle \omega^2 \rangle = 125$ ,  $a = -0.53$ ,  $b = 0.175$ . Максимальное значение функции (красная точка) примерно  $3.1 \times 10^{-2}$ . Оси обезразмерены делением на  $\langle \omega^2 \rangle$  в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функции универсальны. Различие между линиями уровня составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции),  $-1$  для розового жирного контура,  $-2$  для оранжевого пунктирного,  $-3$  для зеленого штрих-пунктирного и  $-4$  для синего тонкого.

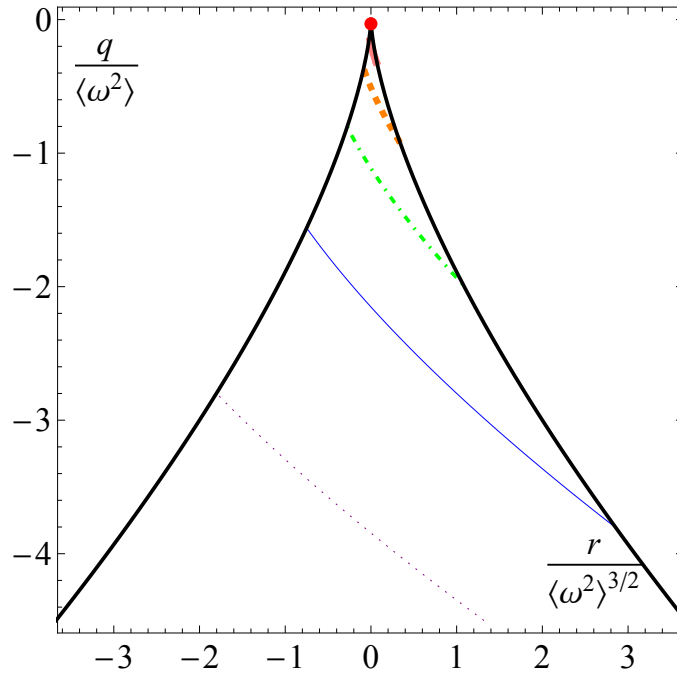


Рисунок В.3 — Аппроксимация функции распределения инвариантов  $Q_S$  и  $R_S$  в «JHTDB-распределении».  $\langle \omega^2 \rangle = 125$ ,  $a = -0.53$ ,  $b = 0.175$ . Максимальное значение функции (красная точка) примерно  $1.05 \times 10^{-3}$ . Оси обезразмерены делением на  $\langle \omega^2 \rangle$  в соответствующих степенях: в таком масштабе линии уровня функции универсальны. Различие между линиями уровня составляет один порядок: 0 для красной точки (максимум функции),  $-1$  для розового жирного контура,  $-2$  для оранжевого пунктирного,  $-3$  для зеленого штрих-пунктирного,  $-4$  для синего тонкого и  $-5$  для фиолетового точечного.