Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П.Н. Лебедева
Российской академии наук
(ФИАН)

Научно-квалификационная работа

Сохраняющиеся заряды полей высших спинов: вычисление и приложения

Аспирант
Гончаров Егор Олегович

Научный руководитель
Васильев Михаил Андреевич, д.ф.-м.н

Москва, 2018 г.

1 Введение

1.1 Теория полей высших спинов: симметрии и сохраняющиеся заряды

Теория полей высших спинов (ВС) – это теория фундаментальных взаимодействий, которая предположительно работает на транспланковском масштабе энергий ($\gtrsim 10^{19}$ ГэВ), где, как ожидается, эффекты квантовой гравитации выступают наравне с эффектами других компонент материи. На данный момент единственным кандидатом на роль теории квантовой гравитации выступает теория струн. Но несмотря на то, что теория струн является самосогласованной квантовой теорией без расходимостей, важнейшей нерешённой проблемой в ней является переход к наблюдаемому низкоэнергетическому спектру частиц. Данная проблема имеет два пути её решения: углубление понимания и дальнейшая разработка теории струн, либо поиск другой теории для описания теории фундаментальных взаимодействий. Среди вариантов – теория ВС, при формулировке которой закладывается симметрия высших спинов [1]: алгебра, которая является максимальным расширением пространственно-временных симметрий. На сегодняшний день теория ВС привлекает значительное внимание, испытавшее значительный подъём около 20 лет назад, который продолжается до сих пор. Основными направлениями исследований являются изучение AdS/CFT соответствия [2, 3, 4, 5], а также дуальности теории ВС и теории струн, согласно предположению о том, что теория струн является теорией высших спинов с частично нарушенными высшими симметриями [6, 7].

Согласно общей прескрипции к описанию фундаментальных взаимодействий, при увеличении характерного масштаба энергии процессов взаимодействий элементарных частиц симметрии, проявляющихся при взаимодействиях, становятся богаче. Именно так обстоит дело с процессами, описываемыми Стандартной Моделью частиц (СтМ). При «нормальных» условиях (до 100 ГэВ) единственными наблюдаемыми процессами взаимодействий являются электромагнитные явления, описываемые квантовой электродинамикой – калибровочной теорией группы $U(1)$. На масштабе энергий выше 200 ГэВ проявляются эффекты слабых взаимодействий, ответственные за радиоактивные распады ядер тяжёлых элементов и отличие в природе между «левым» и «правым». Они описываются моделью Вайнберга-Салама – калибровочной теорией для группы $SU(2) \times U(1)$. При более высоких энергиях начинают проявляться эффекты сильного взаимодействия, ответственные за структуру протона и нейтрона, а также за их связь в ядрах атомов. Расширение теории на сильные взаимодействия производится расширением калибровочной группы до $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Можно добавить, что на масштабе энергий $\gtrsim 10^{16}$ ГэВ (энергия Великого Объединения) ожидается, что эффекты от вышеупомянутых взаимодействий станут равноправными, а на масштабе

$\gtrsim 10^{19}$ ГэВ в игру включится квантовая гравитация.

Таким образом, дальнейшее обобщение теории для описания процессов при сверхвысоких энергиях из опыта СтМ можно проводить, ограничившиль двумя главными принципами:

а) теория должна быть высокосимметричной,

б) теория должна быть калибровочной.

Также дополнительно можно потребовать, чтобы в перспективе теория описывала гравитацию, общековариантность (независимость от системы координат) и релятивистскую инвариантность. Именно эти принципы и закладываются при формулировке теории высших спинов.

На свободном уровне теория ВС разрабатывалась ещё Дираком [8], причём лагранжев формализм появился гораздо позднее [9, 10]. Затем длительное время потребовалось для решения проблемы взаимодействия полей высших спинов на уровне уравнений движения [11], причём лагражнева описания для полной взаимодействующей теории высших спинов не существует и по сей день.

Спектр свободных полей высших спинов даётся классификацией Вигнера неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре [12], согласно которой физически осмысленные кандидаты на роль фундаментальных частиц с конечным числом внутренних степеней свободы характеризуются массой $m \geq 0$ и спином $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$. Безмассовые поля играют более фундаментальную роль так как они отвечают калибровочным теориям и потому несут меньшее число степеней свободы: массивные частицы можно описывать как композиты (резонансы) безмассовых состояний. Поэтому центральная роль в описании фкндаментальных взаимодействий в теории ВС отводится безмассовым полям $m = 0$ всевозможных полуцелых спинов $s \geq 0$. Например, $s = 0$ отвечает безмассовой скалярной частице, $s = 1/2$ – безмассовому фермиону, под которым с высокой точностью можно представлять нейтрино, $s = 1$ – фотону, $s = 2$ – гравитону. Тот факт, что в экспериментах на ускорителях частицы высших спинов наблюдаются только в виде массивных резонансов говорит лишь о том, что симметрии высших спинов, о которых речь пойдёт ниже, нарушены. Важно, что с точки зрения ненарушенных симметрий высших спинов башню полей всевозможных спинов возможно самосогласованным образом оборвать не выше, чем на гравитоне ($s = 2$). Таким образом, под ненарушенной фазой теории высших спинов следует понимать теорию с бесконечным спектром полей. С теоретических позиций наличие бесконечного спектра частиц даёт шанс, что квантовая теория ВС окажется конечной: бесконечные вклады от полей отдельных спинов буду взаимно сокращать друг друга при рассмотрении всего мультиплета (башни) полей.

Среди круга задач в рамках теории ВС имеются таковые о вычислении сохраняющихся зарядов. Как известно из теоремы Нётер, глобальная симметрии системы приводят к наличию у системы сохраняющихся зарядов. Глобальная теория полей ВС соответствует бесконечномерной алгебре ВС, что приводит к наличию бесконечного числа сохраняющихся зарядов [1]. Примеры зарядов, соответствующих низшим симметриям, хорошо известны: к ним относятся электромагнитный заряд, энергия, импульс. В случае нетривиальной гравитации к ним относится, например, масса чёрной дыры. Данная работа посвящена вычислению сохраняющихся зарядов для специальных высокосимметричных полевых систем, напрямую связанных с теорией ВС. В первом случае речь идёт об $sp(2M)$-инвариантной формулировке полей ВС при наложении периодических граничных условий на вспомогательные спинорные переменные [13]. Во втором случае речь идёт о сохраняющихся зарядах тензорных произведений полей ВС и о связи их с амплитудами рассеяния в квантовых теориях поля.

1.2 Периодическая $sp(2M)$-инвариантная формулировка и связь с чёрными дырами

Инвариантность мультиплета полей высших спинов относительно действия группы $Sp\,(8)$ была впервые отмечена в [14]. Идея том, что теории ВС должны допускать формулировку в расширенном явно $sp(2M)$-инвариантном пространс времени является настолько же естественной, как и идея описания суперсимметричных теорий – в суперпространстве. Формулировка теории ВС в $Sp\,(2M)$-инвариантных (супер)пространствах широко исследовалась (см. [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]). В предлагаемой постановке свободные безмассовые бозонные и фермионные поля ВС [17, 18] описываются соответственно скалярным $C\,(X)$ и «свекторным» полями $C_A\,(X)$, определёнными в обобщённом пространстве-времени $\mathcal{M}_M$ с локальными координатами $X^{AB} = X^{BA}$, $A, B = 1 \dots M$.

Сохраняющиеся заряды, соответствующие конформной и высшим симметриям были построены в [19] (см. также [28, 33, 34, 35]). Развёрнутый формализм для $sp(2M)$-инвариантных уравнений был впервые предложен в [17] и позже разработан [28, 29, 30] для вычисления сохраняющихся зарядов и токов. В рамках развёрнутого формализма обобщённое пространство-время $\mathcal{M}_M$ расширяется введением вспомогательных спинорных переменных Y^A до $\mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M$. Переменные Y^A, вместе с производными $\frac{\partial}{\partial Y^A}$, образуют алгебру Гейзенберга H_M,

$$\left[\frac{\partial}{\partial Y^A}, Y^B\right] = \delta_A^B\,, \tag{1}$$

в то время как их билинейные комбинации

$$P_{AB} = \frac{\partial}{\partial Y^A}\frac{\partial}{\partial Y^B}, \qquad K^{AB} = Y^A Y^B, \qquad L_A{}^B = \frac{1}{2}\left(Y^A\frac{\partial}{\partial Y^B} + \frac{\partial}{\partial Y^B}Y^A\right) \tag{2}$$

образуют $sp\,(2M)$. Здесь P_{AB} и K^{AB} представляют обобщённые трансляции и специальные конформные преобразования. Подалгебра $gl(M)$, образованная элементами ${L_A}^B$, разлагается на обобщённую дилатацию $D = {L_A}^A$ и алгебру $sl(M)$, представляющую обобщённые преобразования Лоренца, образованные операторами ${l_A}^B = {L_A}^B - \frac{1}{M}\delta_A^B\, D$ [17, 19].

В данной работе будет построен полный набор сохраняющихся зарядов в случае периодических координат Y^A. Таким образом, пространство, на котором живут поля – $\mathcal{M}_M \times T^M$. Аналогичная проблема для некомпактного спинорного пространства была решена в [30].

Полный набор сохраняющихся зарядов строится вместе остаточной глобальной симметрией, которой он соответствует. Сохраняющиеся заряды представляются в виде интегралов от замкнутых дифференциальных форм и, таким образом, не зависят от поверхности интегрирования. Несмотря на значительное сходство со случаем некомпактного пространства, периодичность влечёт ряд особенностей. Одна из них заключается в том, что так как на торе имеются классы циклов по отношению гомотопичности, вычиление зарядов по ним дают различные наборы. Однако интересным является то, что тем не менее различные системы зарядов связаны друг с другом преобразованием высших спинов. При этом достаточно рассмотреть системы зарядов, получающуюся интегрированием по чисто спинорному вспомогательному пространству, в то время как заряды для других циклов соответствуют высшим симметриям с точки зрения чисто спинорного цикла. Вообще говоря, это означает, что симметрии ВС могут действовать на топологических классах циклов.

Глобальная симметрия, совместная с периодичностью по переменным Y представляется бесконечно-мерной алгеброй Ли, генерируемой элементами $\mathrm{T}^r_{(\xi,n)}$ с $\xi^A \in [0, 2\pi)$, $n_B \in \mathbb{Z}$ и $r = 0, 1$, которые подчиняются коммутационным соотношениям

$$\left[\mathrm{T}^q_{(m,\xi)}, \mathrm{T}^r_{(n,\zeta)}\right] = \mathrm{T}^{|q+r|_2}_{((-)^r m+n,(-)^r\xi+\zeta)} e^{i(-)^r\left(m_C\zeta^C - n_C\xi^C\right)} - \mathrm{T}^{|q+r|_2}_{(m+(-)^q n,\xi+(-)^q\zeta)} e^{-i(-)^q\left(m_C\zeta^C - n_C\right.} \tag{3}$$

где $|q+r|_2 := (q+r) \mod 2$. Подалгебра (3) для $q = r = 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\left[\mathrm{T}^0_{(m,\xi)}, \mathrm{T}^0_{(n,\zeta)}\right] = 2i\,\sin\left(m_C\zeta^C - n_C\xi^C\right)\,\mathrm{T}^0_{(m+n,\xi+\zeta)} \tag{4}$$

и напоминает синус-алгебру, введённую в [36]. Последняя воспроизводится при $\xi, \zeta \in \mathbb{Z}^M$. Аналогично [36], соотношения (3) допускают осцилляторное представление

$$\mathrm{T}^r_{(n,\xi)}\,(k; v) = K^r \star e^{i\xi\, k + in\, v}, \tag{5}$$

$k \in \mathbb{Z}^M$ и $v^C \in [0, 2\pi)$, по отношению к звёздочному произведению

$$(f \star g)(k; v) = \frac{1}{(2\pi)^{2M}} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^M} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}^M u \, \mathrm{d}^M w \cdot$$
$$\cdot f(k+m; v+u)\, g(k+n; v+w) \exp\left[i\left(m_C w^C - n_C u^C\right)\right], \quad (6)$$

действующую на функции $f(k; v) = \sum_N f_N(k)\; e^{iN_C v^C}$ с половиной аргуметов – дискретными, другой половиной – периодичными. Оператор Клейна K (см. например [37]) определяется следующими соотношениями

$$K \star K = 1, \quad K \star f(k; v) = f(-k; -v) \star K. \quad (7)$$

Отметим, что $\left[k_C, e^{iN_B v^B}\right]_\star = -2N_C\, e^{iN_B v^B}$, where $[f, g]_\star \equiv f \star g - g \star f$.

Тета-функция Римана [38]

$$\Theta(Y|X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^M} \exp\left[i\pi\, n_A X^{AB} n_B + 2\pi i\, n_A Y^A\right] \quad (8)$$

может быть проинтерпретирована в качестве эволюционного оператора (или $\mathcal{D}$-функции) полей, распространяющихся в пространстве X, Y с периодическими переменными Y [28]. Данная взаимосвязь с теорией поля может дать альтернативную интерпретацию некоторым важным тождествам для тета-функций [38, 39] (см. также [28]) и наоборот: может открыть возможность аппарата торической геометрии к теории поля.

Рассмотрение периодического спинорного пространства может открыть путь к единообразному описанию чёрных дыр в различном числе измерений. Чёрнодырные конфигурации, такие как решения Шварцшильда, Керра-Ньюмена, Райснера-Нордстрема в асимптотически-плоском или AdS пространстве, либо чёрная дыра BTZ в 3-мерном пространстве являются точными решениями теории гравитации. Более того, чёрная дыра BTZ локально диффеоморфна AdS_3, что получается факторизацией группы AdS_3 $\mathrm{O}(2,2)$ по специальной дискретной подгруппе [40]. Это означает, что она описывается плоской связностью AdS_3 при наложении специальных граничных условий. Такого рода конструкция даёт намёк, что чёрные дыры в различном числе измерений могут быть построены в терминах BTZ-подобных решений в $\mathcal{M}_M \times T^M$ для специальным образом выбранной плоской связности в развёрнутых уравнениях. Пространственно-временная периодичность в $\mathcal{M}_M$ индуцируется периодичностью по спинорным переменным посредством развёрнутых уравнений. А сами чёрные дыры, по всей видимости, могут быть получены как проекции вышеупомянутых «плоских» решений на поверхности в $\mathcal{M}_M$, отвечающих обычному пространству-времени. Эта идея, впервые высказанная в [41], представляет основную мотивацию для данного исследования и открывает возможности для дальнейших исследований.

1.3 О связи многочастичных амплитуд и зарядов полей высших спинов

Знаменитая формула Парке-Тейлора для n-частичной древесной упорядоченной по цвету MHV[1] амплитуды даётся формулой [42, 43]

$$\mathcal{A}\left(a_1^+ \dots a_i^- \dots a_j^- \dots a_n^+\right) \propto \mathrm{Tr}\left(T^{a_1} \dots T^{a_n}\right) \mathcal{A}_{\lambda,\widetilde{\lambda}}^{(ij,1\dots i-1\; i+1\dots j-1\; j+1\dots n)} \tag{9}$$

где

$$\mathcal{A}_{\lambda,\widetilde{\lambda}}^{(ij,1\dots i-1\; i+1\dots j-1\; j+1\dots n)} = \frac{\langle\lambda_i\lambda_j\rangle^4}{\langle\lambda_1\lambda_2\rangle\langle\lambda_2\lambda_3\rangle\dots\langle\lambda_n\lambda_1\rangle}\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{I=1}^{n}\lambda_{Ia}\widetilde{\lambda}_{I\dot{a}}\Big). \tag{10}$$

Здесь $\lambda_a, \widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$ с индексами $a, \dot{a} = 1, 2$ – двухкомпонентные спиноры, представляющие светоподобные импульсы $p_{a\dot{a}} = \lambda_a\widetilde{\lambda}_{\dot{a}}$, кроме того $\langle\lambda_r\lambda_s\rangle = \varepsilon^{ab}\,\lambda_{ra}\lambda_{sb}$, $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$, $\varepsilon^{12} = 1$. Формула (10) в значительной мере поспособствовала выявлению геометрии твисторов и грассманиана, подлежащих динамике теории (супер-)Янга-Миллса [44, 45, 46, 47] и впоследствии привела к открытию дуальной супер-конформной инвариантности амплитуд рассеяния [48, 49] вместе с бесконечномерной симметрией янгиана для планарной максимально-супер-симметричной теории Янга-Миллса [50]. Метод интегрирования по грассманиану применялся также для вычисления форм-факторов и амплитуд off-shell [51, 52, 53]. Интересная конструкция *пертурбинера* [54, 55] рассматривает полную теорию Янга-Миллся посредством теории возмущений для её самодуального (СД) сектора. Рассмотрение взаимодействующих конформных полей высших спинов над самодуальным вакуумом было проделано в [56, 57] в рамках твисторного подхода.

Амплитуды параметризуются асимптотическими свободными состояниями, т.е. свободными частицами. Уже не новость, что свободные поля обладают высшими симметриями, а именно симметрией высших спинов (ВС) [1]. Последняя образована сохраняющимися зарядами ВС $\mathcal{Q}_\eta$, представленными билинейными комбинациями динамических полей $\mathcal{C}$ [28, 30]. Сохраняющиеся заряды ВС допускают представление в виде интегралов от замкнутых on-shell (т.е. на уравнениях движения) дифференциальных форм $\Omega_\eta(\mathcal{C})$

$$\mathcal{Q}_\eta = \int_{\mathbf{S}} \Omega_\eta(\mathcal{C}) \tag{11}$$

по поверхности $\mathbf{S}$ в пространстве соответствия $\mathbf{Cor}$, объединяющем твистор-подобное пространство с локальными спинорными координатами y^a, $\widetilde{y}^{\dot{a}}$ и 4-мерное пространство Минковского с координатами $x^{a\dot{a}}$. В данном контексте

[1]Термин MHV расшифровывается как "maximally helicity violating"и обозначает, что среди взаимодействующих (входящих) частиц имеется всего две частицы отрицательной спиральности.

$\eta(y, \widetilde{y}, x)$ являются свободными параметрами, различающими между зарядами, соответствующими различным (высшим и низшим) симметриям полей C. Тот факт, что форма Ω замкнута в пространстве соответствия, влечёт сохранение заряда: $\mathcal{Q}$ не зависит от локальных вариаций поверхности $\mathbf{S}$. В частности, данное обстоятельство позволяет вычислять заряды ВС в виде интегралов в равной степени как по твисторному пространству с координатами y^a, $\widetilde{y}^{\dot{a}}$, так и по обычному пространству-времени.

Будучи билинейными по полям $\mathcal{C}$, обычные токи высших спинов описывают только две частицы, что представляет малый интерес с точки зрения амплитуд рассеяния. Тем не менее, как показано в [30], конструкция сохраняющихся токов допускает обобщение на случай произвольного числа частиц. Было указано [30], что такие токи генерируют так называемые многочастичные симметрии [58], лежащие в основе многочастичных расширений теорий ВС, предложенных в [7]. Целью данной работы состоит переформулировать известные амплитуды рассеяния в качестве многочастичных зарядов ВС свободных полей. Преимущество предлагаемой формулировки состоит в том, что она даёт возможность формулировки амплитуд в равной степени как интегралов по пространству твисторов, либо обычному пространству-времени. Следует отметить, что n-частичные токи не являются локальными в стандартном смысле, будучи определёнными в специальном расширенном пространстве, содержащем декартово произведение n двумерных плоскостей в пространстве Минковского (см. раздел 4). Иными словами, многочастичные заряды представляются кратным интегрированием по пространству-времени.

Следует отметить, что предлагаемый подход является чисто кинематическим: построение сохраняющихся зарядов обладает произволом в выборе функционального параметра η, который не может быть зафиксирован на уровне свободных полей, что в свою очередь позволяет воспроизводить известные амплитуды в рамках теории ВС. Свобода в выборе η должна фиксироваться посредством динамики в рамках конкретной теории. Это не является целью работы. Вместо этого утверждается, что для данного η, характерного для некоторой теории, возможно использовать представление (11) для перехода между представлениями амплитуды в форме интеграла по твисторам и интеграла по пространству-времени. В данной работе будут предъявлены параметры η, для которых воспроизводятся многочастичные древесные древесныеамплитуды MHV. Будучи хорошо известным со стороны теории ВС (см. например [30, 35]), данный подход кажется новым с точки зрения применений к амплитудным вычислениям, где, как можно ожидать, он позволить объяснить, каким образом различные с первого взгляда подходы приводят к одним и тем же результатам.

Структура дальнейшего изложения выстроена следующим образом. В разделе 2 проводится анализ сохраняющихся зарядов и глобальной симметрии $sp(2M)$-инвариантной развёрнутой системы при наложении периодичных условий на вспомогательные переменные Y. В разделе 3 будет явным образом установлено соответствие между многочастиными сохраняющимися зарядами ВС и амплитудами MHV теории Янга-Миллса.

1.4 Актуальность, новизна и достоверность

Все проделанные исследования являются оригинальными. Их актуальность диктуется существующим на сегодняшний день интересом к теории высших спинов (в частности к исследованию чёрных дыр и космологических решений [59, 60]) а также значительным прогрессом в течение последних 20 лет в области исследования высших симметрий амплитуд рассеяния [48, 49, 50]. Представленные результаты являются достоверными и докладывались на международных конференциях:

- «Higher Spin theory and Holography - 3», ФИАН, 23 – 25 ноября 2015 г., доклад «Higher-spin fields and charges in the periodic spinor space»,
- «Higher Spin theory and Holography - 7», ФИАН, 4 – 6 июня 2018 г., доклад «Towards scattering amplitudes from the multiparticle higher-spin charges».

Задача, описанная в разделе 2 опубликована [13]. Другая задача (раздел 3) готовится к публикации в ближайшее время. Обе изложенные задачи имеют перспективы для дальнейшего развития. Задача из раздела 2 может быть в перспективе приложена к описанию чёрных дыр в различном числе пространствен временных измерений. Техника задачи из раздела 3 планируется к применению для вычисления зарядов, следующих из токовых поправок в нелинейных равнениях ВС [11, 61], что принадлежит переднему краю исследований в области амплитуд в теории высших спинов [57, 61].

2 Поля высших спинов и заряды в периодическом пространстве соответствия

2.1 Поля и токи

Как было показано в [18] бесконечные башни конформных полей в высших размерностях ($d \geq 4$) (см. также [25] и цитируемую литературу) допускают удобное описание в терминах обобщённого пространства-времени $\mathcal{M}_M$ с координатами, представленными действительными симметрическими матрицами $X^{AB} = X^{BA}$ $(A, B = 1...M)$. Для *развёрнутой формулировки* пространство $\mathcal{M}_M$ дополняется вспомогательными твистор-подобными переменными Y^A, параметризующими $\mathbb{R}^M$ [17]. Конформные поля описываются скалярной функцией $C^{\pm}(Y|X)$, удовлетворяющей развёрнутому уравнению ранга 1

[30, 33]

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^{AB}} \pm i\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}\right) C^{\pm}\left(Y|X\right) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) выражает собой условие ковариантного постоянства с плоской связностью

$$W^{\pm}\left(Y, \partial_Y|X\right) = \pm i\,\mathrm{d}X^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}. \tag{13}$$

Бозоны описываются чётными функциями ($C^{\pm}\left(-Y|X\right) = C^{\pm}\left(Y|X\right)$), в то время как фермироны – нечётными ($C^{\pm}\left(-Y|X\right) = -C^{\pm}\left(Y|X\right)$) [30].

Развёрнутая формулировка оказывается полезной во многих отношениях. В частности, уравнение (12) позволяет восстанавливать зависимость от переменных X по заданной функции $C^{\pm}\left(Y|0\right)$,

$$C^{\pm}\left(Y|X\right) = \exp\left[\mp iX^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}\right] C^{\pm}\left(Y|0\right). \tag{14}$$

Представление $C^{\pm}\left(Y|0\right)$ в виде интеграла Фурье даёт представление для общего решения уравнения (12)

$$C^{\pm}\left(Y|X\right) = \int \mathrm{d}^M\xi\, c^{\pm}\left(\xi\right)\, \exp\left[\pm i\left(\xi_A\xi_B X^{AB} + \xi_B Y^B\right)\right] \tag{15}$$

в виде разложения по функциям

$$\theta^{\pm}_{\xi}\left(Y|X\right) = \exp\left[\pm i\left(\xi_A\xi_B X^{AB} + \xi_B Y^B\right)\right]. \tag{16}$$

Как объясняется в [28, 30] (см. также [18]), индекс $\pm$ в (15) различает между положительно- и отрицательно-частотными модами, которые при квантовании соответствуют частицам и античастицам. Обе моды взаимно комплексно сопряжены

$$\overline{C^{+}\left(Y|X\right)} = C^{-}\left(Y|X\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{c^{+}\left(\xi\right)} = c^{-}\left(\xi\right). \tag{17}$$

Другая полезная особенность развёрнутого описания заключается в том, что оно позволяет регулярным образом описывать симметрии системы следующим образом. Рассмотрим оператор, действующий на полях

$$C^{\pm}\left(Y|X\right) \to \eta\left(Y, \partial_Y|X\right) C^{\pm}\left(Y|X\right). \tag{18}$$

Для того, чтобы быть преобразованием симметрии, оператор $\eta\left(Y, \partial_Y|X\right)$ должен коммутировать с дифференциальным оператором уравнения (12),

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^{AB}} \pm i\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial Y^B}, \eta\left(Y, \partial_Y|X\right)\right] = 0. \tag{19}$$

Условие (19) формально совместно ввиду того, что связность (12) плоская. Дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}\left(Y|X\right)=Y^{C}\mp 2iX^{CB}\frac{\partial}{\partial Y^{B}},\quad \mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\left(Y|X\right)=\frac{\partial}{\partial Y^{C}} \tag{20}$$

удовлетворяют уравнению (19). Пары операторов $\mathcal{A}_{+}{}^{C},\mathcal{B}^{+}{}_{C}$ и $\mathcal{A}_{-}{}^{C},\mathcal{B}^{-}{}_{C}$ образуют алгебру Гейзенберга H_M [29]

$$\left[\mathcal{B}^{\pm}{}_{A},\mathcal{A}_{\pm}{}^{B}\right]=\delta_{A}^{B}\,,\qquad \left[\mathcal{A}_{\pm}{}^{B},\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}\right]=0,\quad \left[\mathcal{B}^{\pm}{}_{B},\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\right]=0\,. \tag{21}$$

Операторы (20) называются *ковариантными осцилляторами*. Функции ковариантных осцилляторов $\eta\left(\mathcal{A}_{\pm};\mathcal{B}^{\pm}\right)$ являются решениями (19), а следовательно – симметриями (12).

Ковариантные осцилляторы действуют на баазис (16) следующим образом

$$\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\,\theta_{\xi}^{\pm}=\pm i\xi_{C}\,\theta_{\xi}^{\pm},\qquad \mathcal{A}_{\pm}^{C}\,\theta_{\xi}^{\pm}=\mp i\frac{\partial}{\partial\xi_{C}}\,\theta_{\xi}^{\pm}. \tag{22}$$

Возведение в экспоненту (22) даёт

$$\exp\left[\pm i\zeta_{C}\,\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}\right]\,\theta_{\xi}^{\pm}=\theta_{\xi+\zeta}^{\pm}, \tag{23}$$

что позволяет построить базис (16) из одного вакуумного вектора $\theta_0 := \theta_0^{\pm}\left(Y|X\right)=1$,

$$\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\,\theta_{0}=0,\qquad \exp\left[\pm i\xi_{C}\,\mathcal{A}_{\pm}^{C}\right]\,\theta_{0}=\theta_{\xi}^{\pm}. \tag{24}$$

Таким образом, любое решение уравнения (12) может быть написано в виде

$$C^{\pm}\left(Y|X\right)=\int \mathrm{d}^{M}\xi\,c^{\pm}\left(\xi\right)\,\exp\left[\pm i\xi_{C}\,\mathcal{A}_{\pm}^{C}\right]\,\theta_{0}. \tag{25}$$

Результат действия преобразования симметрии может быть представлен как

$$\eta\left(\mathcal{A}_{\pm};\mathcal{B}^{\pm}\right)\,C^{\pm}\left(Y|X\right)=\int \mathrm{d}^{M}\xi\,c^{\pm}\left(\xi\right)\,\eta\left(\mp i\partial_{\xi};\pm i\xi\right)\,\theta_{\xi}^{\pm}\left(Y|X\right)\,. \tag{26}$$

Эволюция полей по переменным X от $C^{\pm}\left(Y|X'\right)$ к $C^{\pm}\left(Y|X\right)$ производится $\mathcal{D}$-функцией согласно следующему преобразованию [30]

$$C^{\pm}\left(Y|X\right)=\int \mathrm{d}^{M}Y'\,\mathcal{D}^{\pm}\left(Y-Y'|X-X'\right)\,C^{\pm}\left(Y'|X'\right)\,. \tag{27}$$

$\mathcal{D}$-функция является решением уравнения (12) с δ-функционными начальными данными

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^{AB}}\pm i\frac{\partial^{2}}{\partial Y^{A}\partial Y^{B}}\right)\mathcal{D}^{\pm}\left(Y-Y'|X-X'\right)=0,\quad \mathcal{D}^{\pm}\left(Y-Y'|0\right)=\delta\left(Y-Y'\right). \tag{28}$$

Следовательно

$$\mathcal{D}^{\pm}\left(Y|X\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{M}}\int \mathrm{d}^{M}\xi\,\theta_{\xi}^{\pm}\left(Y|X\right). \tag{29}$$

2.2 Сохраняющиеся токи

Удвоение спинорных переменных приводит к *развёрнутому уравнению ранга два* [33]

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^{AB}} + i\frac{\partial^2}{\partial Y_1^A \partial Y_1^B} - i\frac{\partial^2}{\partial Y_2^A \partial Y_2^B}\right) J\left(Y_1, Y_2 | X\right) = 0. \tag{30}$$

Его решения $J\left(Y_1, Y_2|X\right)$ называются *токами* и описывают сохраняющиеся токи в рамках развёрнутого формализма. Плоская связность

$$W^{(2)}\left(Y_{1,2}, \partial_{Y_{1,2}} \middle| X\right) = i\,\mathrm{d}X^{AB}\left(\frac{\partial^2}{\partial Y_1^A \partial Y_1^B} - \frac{\partial^2}{\partial Y_2^A \partial Y_2^B}\right) = W^{+}\left(Y_1, \partial_{Y_1}|X\right) + W^{-}\left(Y_2, \partial_{Y_2}|X\right) \tag{31}$$

представляется суммой плоских связностей для положительно- и отрицательно-частотных мод (12). Таким образом, билинейные произведения полей ранга один

$$J\left(Y_{1,2}|X\right) = C^{+}\left(Y_1|X\right) C^{-}\left(Y_2|X\right)\,, \tag{32}$$

называемые *билинейными токами*, удовлетворяют уравнению (30). Естественное обобщение токов (32) посредством расширение набора полей (15) с добавлением цветового индекса $\mathrm{i} = 1...\mathcal{N}$

$$J\left(Y_{1,2}|X\right) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathcal{N}} C_{\mathrm{i}}^{+}\left(Y_1|X\right) C_{\mathrm{i}}^{-}\left(Y_2|X\right), \tag{33}$$

играет центральную роль для AdS/CFT соответствия (см. например [3, 4]) и было рассмотрено для некомпактного пространства спиноров например в [30]. Так как оно не играет никакой роли для данной работы и может быть легко восстановлено, мы в последующем изложении его рассматривать не будем.

Билинейный ток (32) является частным случаем более общего билинейного поля вида

$$J_\eta\left(Y_{1,2}|X\right) = \eta\left(Y_{1,2}, \partial_{Y_{1,2}} \middle| X\right) C^{+}\left(Y_1|X\right) \acute{-} Y_2 X, \tag{34}$$

где $\eta\left(Y_{1,2}, \partial_{Y_{1,2}} \middle| X\right)$ – симметрия уравнения (30). Аналогично ситуации для полей ранга один, η коммутирует с ковариантным дифференциалом уравнения (30)

$$\left[\frac{\partial}{\partial X^{AB}} + i\frac{\partial^2}{\partial Y_1^A \partial Y_1^B} - i\frac{\partial^2}{\partial Y_2^A \partial Y_2^B}, \eta\left(Y_{1,2}, \partial_{Y_{1,2}} \middle| X\right)\right] = 0. \tag{35}$$

Ковариантные осцилляторы (20)

$$\mathcal{A}_{+}{}^{C}\left(Y_1|X\right), \mathcal{B}^{+}{}_{C}\left(Y_1|X\right) \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_{-}{}^{C}\left(Y_2|X\right), \mathcal{B}^{-}{}_{C}\left(Y_2|X\right) \tag{36}$$

удовлетворяют уравнению (35), а значит функции вида $\eta\left(\mathcal{A}_+,\mathcal{A}_-;\mathcal{B}^+,\mathcal{B}^-\right)$ являются симметриями уравнения (30), что даёт наиболее общий вид билинейного тока [30]

$$J_\eta\left(Y_{1,2}|X\right)=\eta\left(\mathcal{A}_+,\mathcal{A}_-;\mathcal{B}^+,\mathcal{B}^-\right)C^+\left(Y_1|X\right)C^-\left(Y_2|X\right). \tag{37}$$

Действие ковариантных осцилляторов на базисных векторах ранга два $\theta^+_\xi\left(Y_1|X\right)\theta^-_\zeta\left(Y_2|X\right)$

$$\begin{array}{ll}\mathcal{B}^+{}_C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta=i\xi_C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta\,, & \mathcal{B}^-{}_C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta=-i\zeta_C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta\,,\\ \mathcal{A}_+{}^C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta=-i\dfrac{\partial}{\partial\xi_C}\theta^+_\xi\theta^-_\zeta\,, & \mathcal{A}_-{}^C\,\theta^+_\xi\theta^-_\zeta=i\dfrac{\partial}{\partial\zeta_C}\theta^+_\xi\theta^-_\zeta\end{array} \tag{38}$$

позволяет сгенерировать весь базис из одного вакуумного вектора $\theta^{(2)}_0:=\theta^+_0\theta^-_0=1$,

$$\mathcal{B}^\pm{}_C\,\theta^{(2)}_0=0\,,\qquad \theta^+_\xi\theta^-_\zeta=\exp\left[i\xi_C\,\mathcal{A}_+{}^C-i\zeta_C\,\mathcal{A}_-{}^C\right]\,\theta^{(2)}_0. \tag{39}$$

Действие параметра симметрии (37) даётся выражением

$$J_\eta\left(Y_{1,2}|X\right)=\int \mathrm{d}^M\xi\mathrm{d}^M\zeta\,c^+\left(\xi\right)c^-\left(\zeta\right)\,\eta\left(-i\partial_\xi,i\partial_\zeta;i\xi,-i\zeta\right)\theta^+_\xi\left(Y_1|X\right)\theta^-_\zeta\left(Y_2|X\right). \tag{40}$$

Удобно рассмотреть следующие комбинации ковариантных осцилляторов $\mathcal{A},\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{B}_C=\mathcal{B}^-{}_C-\mathcal{B}^+{}_C, & \widetilde{\mathfrak{B}}_C=\mathcal{B}^-{}_C+\mathcal{B}^+{}_C,\\ \widetilde{\mathfrak{B}}^C=\dfrac{1}{2}\left(\mathcal{A}_-{}^C-\mathcal{A}_+{}^C\right), & \mathfrak{B}^C=\dfrac{1}{2}\left(\mathcal{A}_-{}^C+\mathcal{A}_+{}^C\right)\end{array} \tag{41}$$

со следующими ненулевыми коммутационными соотношениями

$$\left[\mathfrak{B}_A,\widetilde{\mathfrak{B}}^B\right]=\delta^B_A,\quad \left[\widetilde{\mathfrak{B}}_A,\mathfrak{B}^B\right]=\delta^B_A. \tag{42}$$

Новые осцилляторы удобно представлять дифференциальными операторами

$$\begin{array}{ll}\mathfrak{B}_C=\dfrac{\partial}{\partial U^C}, & \widetilde{\mathfrak{B}}_C=\dfrac{\partial}{\partial V^C},\\ \widetilde{\mathfrak{B}}^C=U^C+iX^{CB}\dfrac{\partial}{\partial V^B}, & \mathfrak{B}^C=V^C+iX^{CB}\dfrac{\partial}{\partial U^B}\end{array} \tag{43}$$

в терминах переменных [30]

$$Y_1=V-U,\quad Y_2=V+U. \tag{44}$$

Рассмотрим инволютивный антиавтоморфизм ρ алгебры ковариантных осцилляторов, действующий следующим образом

$$\rho\left(\mathcal{A}_\pm{}^B\right)=\mathcal{A}_\mp{}^B,\quad \rho\left(\mathcal{B}^\pm{}_C\right)=-\mathcal{B}^\mp{}_C. \tag{45}$$

Осцилляторы $\mathfrak{B}, \widetilde{\mathfrak{B}}$ оказываются соответственно ρ-чётными и ρ-нечётными,

$$\rho(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}, \quad \rho(\widetilde{\mathfrak{B}}) = -\widetilde{\mathfrak{B}}. \tag{46}$$

Для конкретных вычислений удобно зафиксировать способ упорядочения осцилляторов при рассмотрении функций от них. В дальнейшем в данных целях будет использоваться полностью симметричное упорядочение, выражаемое вейлевским звёздочным произведением. В таком случае для двух символов (т.е. функций коммутирующих переменных) $f(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-; \mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-)$ and $g(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-; \mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-)$ их звёздочное произведение выглядит следующим образом

$$(f * g)(\mathcal{A}; \mathcal{B}) = f(\mathcal{A}; \mathcal{B}) \exp \frac{1}{2} \sum_{a=+,-} \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \mathcal{B}^a{}_C} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathcal{A}_a{}^C} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \mathcal{A}_a{}^C} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \mathcal{B}^a{}_C} \right) g(\mathcal{A}; \mathcal{B}). \tag{47}$$

В терминах звёздочного произведения (47) вакуумный вектор $\theta_0^{(2)}$ удовлетворяющий $\mathcal{B}^\pm{}_C * \theta_0^{(2)} = 0$ реализуется в виде функции

$$\theta_0^{(2)} = \exp \left[-2 \sum_{a=+,-} \mathcal{A}_a{}^C \mathcal{B}^a{}_C \right]. \tag{48}$$

Символы базисных элементов в терминах звёздочного произведения $\theta_\xi^+ \theta_\zeta^-$ генерируются из вакуумного вектора $\theta_0^{(2)}$ посредством левого произведения (39)

$$\theta_\xi^+ \theta_\zeta^- = \exp \left[i\xi_C \mathcal{A}_+{}^C - i\zeta_C \mathcal{A}_-{}^C \right] * \theta_0^{(2)} = \exp \left[2i\xi_C \mathcal{A}_+{}^C - 2i\zeta_C \mathcal{A}_-{}^C \right] \cdot \theta_0^{(2)}. \tag{49}$$

В терминах выбранного звёздочного произведения параметры симметрии представляются символами $\eta(\mathcal{A}; \mathcal{B})$. Так как вейлевское упорядочение симметрично, автоморфизм ρ (45) действует на символ $f(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-; \mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-)$ простым образом

$$\rho\left(f\left(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-; \mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-\right)\right) = f\left(\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+; -\mathcal{B}^-, -\mathcal{B}^+\right). \tag{50}$$

Тот факт, что ρ является антиавтоморфизмом звёздочного произведения (47), $\rho(f * g) = \rho(g) * \rho(f)$, проверяется прямым вычислением.

2.3 Периодическое пространство спиноров

Для построения периодических решений достаточно поместить (15) на решётку полагая $\xi_A = \frac{2\pi}{\ell^{(A)}} n_A$ with $n_A \in \mathbb{Z}$ (или в сжатых обозначениях $\xi = \frac{2\pi}{\ell} n$ для $n \in \mathbb{Z}^M$)

$$\theta^{\pm}_{2\pi\, n/\ell}\,(Y|X) = \exp\left[\pm i\left(4\pi^2\, n_A n_B\, \frac{X^{AB}}{\ell^{(A)}\ell^{(B)}} + 2\pi\, n_A\, \frac{Y^A}{\ell^{(A)}}\right)\right]. \qquad (52)$$

Данные решения являются $\ell^{(A)}$-периодическими по переменным Y^A. Некомпактный предел соответствует $\ell^{(A)} \to \infty$.

Удобным является использование перемасштабированных переменных

$$Y'^A := \frac{2\pi}{\ell^{(A)}}\, Y^A,\ X'^{AB} := \frac{4\pi^2}{\ell^{(A)}\ell^{(B)}}\, X^{AB}\,. \qquad (53)$$

отвечающих выбору

$$\ell^{(A)} = 2\pi. \qquad (54)$$

В дальнейшем мы не будем различать между переменными со штрихом и без, так как зависимость от периодов $\ell^{(A)}$ может быть восстановлена при необходимости после.

В терминах перемасштабированных переменных базисные векторы (52) принимают вид

$$\theta^{\pm}_{n}\,(Y|X) := \exp\left[\pm i\left(n_A n_B\, X^{AB} + n_B\, Y^B\right)\right]\,, \qquad (55)$$

в то время как периодичесие поля (**??**) могут быть записаны в виде

$$C^{\pm}\,(Y|X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^M} c^{\pm}_n\, \theta^{\pm}_n\,(Y|X)\,. \qquad (56)$$

Базисные функции (55) (а занчит и функции (56)) являются 2π- периодическими по переменным Y, 2π- периодическими по переменным X^{AA} и π-периодическими по переменным X^{AB} при $A \neq B$. Таким образом, развёрнутый формализм индуцирует периодичность полей на $\mathcal{M}_M$ из таковой по спинорным переменным Y. Он также влечёт то, что при восстановлении зависимости от радиусов, периоды по переменным X имеют факторизованный вид по периодам переменных Y. Именно, периоды по переменным Y и X таковы: $\ell^{(A)}$ для Y^A, $\frac{\ell^{(A)}\ell^{(A)}}{2\pi}$ для X^{AA} и $\frac{\ell^{(A)}\ell^{(B)}}{4\pi}$ for X^{AB} $(A \neq B)$. Итого, возможные периоды в $\frac{M(M+1)}{2}$-мерном пространстве $\mathcal{M}_M$, совместные с развёрнутыми уравнениями (12), оказываются параметризованным M числами.

Ввиду второго соотношения среди (22), которое нарушает периодичность, полиномы, составленные из ковариантных осцилляторов $\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}$ (20) не действуют на базисе (55). Периодичность не нарушается операторами вида

$$\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\theta^{\pm}_n = \pm i\, n_C\, \theta^{\pm}_n, \qquad \exp\left[\pm i\, m_C\, \mathcal{A}_{\pm}{}^{C}\right]\theta^{\pm}_n = \theta^{\pm}_{n+m} \qquad (57)$$

для любых $m, n \in \mathbb{Z}^M$. Подобно тому, как это имело место для некомпактного случая, базис генерируется из одного вакуумного вектора θ_0

$$\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\,\theta_0 = 0\,, \qquad \exp\left[\pm i\, n_C\, \mathcal{A}_{\pm}{}^{C}\right]\theta_0 = \theta^{\pm}_n. \qquad (58)$$

Периодичность требует, чтобы любое преобразование симметрии было 2π-периодичным по осцилляторам $\mathcal{A}$

$$\eta = \eta\left(e^{i\,\mathcal{A}_\pm}; \mathcal{B}^\pm\right). \tag{59}$$

Таким образом, параметр η подразумевается полиномиальным по осцилляторам $\mathcal{B}^\pm$ и лорановским полиномом по $e^{i\,\mathcal{A}_\pm}$. Действие преобразования симметрии приобретает вид

$$\eta\left(e^{i\,\mathcal{A}_\pm}; \mathcal{B}^\pm\right)$$

Для уравнения ранга два (30) периодность по спинорным переменным строится аналогично. Билинейные токи (32) строятся из положительно- и отрицательно-частотных полей ранга один (56)

$$J\left(Y_{1,2}|X\right) = \sum_{m,n} c_m^+ c_n^-\, \theta_m^+\left(Y_1|X\right)\theta_n^-\left(Y_2|X\right). \tag{61}$$

Базисные элементы $\theta_m^+\left(Y_1|X\right)\theta_n^-\left(Y_2|X\right)$ восстанавливаются из вакуумного вектора $\theta_0^{(2)}$ аналогично (39)

$$\mathcal{B}^\pm{}_C\, \theta_0^{(2)} = 0\,, \qquad \exp\left[im_C\,\mathcal{A}_+{}^C - in_C\,\mathcal{A}_-{}^C\right]\,\theta_0^{(2)} = \theta_m^+\theta_n^-. \tag{62}$$

В терминах Y_1, Y_2 иU, V (44) они принимают вид

$$\begin{aligned}\theta_m^+\left(Y_1|X\right)\theta_n^-\left(Y_2|X\right) = \exp\left[i\left((m+n)_B\,(m-n)_C\; X^{BC} + m_C\,Y_1^C - n_C\,Y_2^C\right)\right] = \\ = \exp\left[i\left((m+n)_B\,(m-n)_C\; X^{BC} - (m+n)_C\; U^C + (m-n)_C\; V^C\right)\right].\end{aligned} \tag{63}$$

Периоды функций (63) по переменным X^{AB} такие же как функций (55).

Преобразования глобальной симметрии не нарушают периодичность по переменным Y_1 и Y_2 тогда и только тогда, когда они построены из образующих $e^{i\,\mathcal{A}_a{}^C}$ и $\mathcal{B}^a{}_C$,

$$\eta = \eta\left(e^{\pm i\,\mathcal{A}_a}; \mathcal{B}^b\right)\,, \qquad a, b = +, -\,. \tag{64}$$

В рамках вейлевского упорядочения периодичные символы параметров (64) допускаю разложение в ряд Фурье,

$$\eta\left(\mathcal{A}; \mathcal{B}\right) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^M} \eta_{kl}\left(\mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-\right)\; e^{ik_B\,\mathcal{A}_+{}^B} e^{il_C\,\mathcal{A}_-{}^C}, \tag{65}$$

что даёт явную формулу для действия симметрий:

$$\begin{aligned}J_\eta\left(Y|X\right) := \eta\left(\mathcal{A}; \mathcal{B}\right) * J\left(Y|X\right) = \\ \sum_{m,n,k,l} c_m^+ c_n^-\,\eta_{kl}\left(im + \frac{ik}{2}, -in + \frac{il}{2}\right)\cdot\theta_{m+k}^+\theta_{n-l}^-.\end{aligned} \tag{66}$$

В терминах осцилляторов (41) разложение (65) имеет следующий вид

$$\eta\big(\mathfrak{B},\widetilde{\mathfrak{B}}\big)=\sum_{k,l}\eta_{kl}\big(\mathfrak{B}_C,\widetilde{\mathfrak{B}}_D\big)\,e^{i(k+l)_A\,\mathfrak{B}^A}e^{-i(k-l)_B\,\widetilde{\mathfrak{B}}^B}. \tag{67}$$

Для $N_A\in\mathbb{Z}$, рассмотрим обозначение $|N_A|_2=N_A \mod 2$, а для $N\in\mathbb{Z}^M$ аналогичное обозначение $|N|_2\in\mathbb{Z}_2{}^M$ подразумевается применённым покомпонентно. Тогда $|k+l|_2=|k-l|_2$ и разложение (67) может быть представлено следующим образом

$$\eta\big(\mathfrak{B},\widetilde{\mathfrak{B}}\big)=\sum_{|N|_2=|\widetilde{N}|_2}\eta_{N,\widetilde{N}}\big(\mathfrak{B}_C,\widetilde{\mathfrak{B}}_D\big)\,e^{iN_A\,\mathfrak{B}^A}e^{i\widetilde{N}_B\,\widetilde{\mathfrak{B}}^B}. \tag{68}$$

$\mathcal{D}$-функции для периодических решений (12) вводятся аналогично некомпактному слуаю [28]. В случае положительно-частотных полей $\mathcal{D}$-функция

$$\theta\left(Y|X\right)=\frac{1}{(2\pi)^M}\sum_n\exp\left[i\left(n_An_B\,X^{AB}+n_A\,Y^A\right)\right] \tag{69}$$

является решением уравнения (12) с δ-функционными начальными данными на торе,

$$\theta\left(Y|0\right)=\delta\left(Y\right),\quad Y^A\in[-\pi,\pi)\ \text{for}\ A=1...M. \tag{70}$$

С точностью до перемасштабирования переменных выражение (69) представляет тета-функцию Римана [38]

$$\Theta\left(Y|X\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^M}\exp\left[i\pi\,n_An_B\,X^{AB}+2\pi i\,n_AY^A\right]. \tag{71}$$

Действие ковариантных осцилляторов $e^{ib\,\mathcal{B}}e^{ia\,\mathcal{A}}\,\theta\left(Y|X\right)$ приводит к тета - функциям с рациональными характеристиками $a_C\in\mathbb{Q}$ and $b^C\in\mathbb{Q}$ $(C=1...M)$ ([38], см. также [39])

$$\Theta_{a,b}\left(Y|X\right):=\sum_n\exp\left[i\pi\left(n+a\right)_B\left(n+a\right)_C X^{BC}+2\pi i\,\left(n+a\right)_B\,\left(Y+b\right)^B\right]. \tag{72}$$

Совместно с периодичностью по переменным Y (а также вышеупомянутой периодичностью по переменным X) (69) является квази-периодичной с матрицей квазипериодов X [38]

$$\mathcal{S}_m\,\theta\left(Y|X\right):=\theta\left(Y^C+2m_B\,X^{BC}\big|X\right)=e^{-i\left(m_Bm_C\,X^{BC}+m_B\,Y^B\right)}\,\theta\left(Y|X\right). \tag{73}$$

Квази-сдвиги $\mathcal{S}_m$, $m\in\mathbb{Z}^M$, Определяемые как полулинейные операции на полях ранга один (55)

$$\mathcal{S}_m\,\left(\lambda\,\theta^{\pm}_n\left(Y|X\right)\right):=\overline{\lambda}\,\theta^{\pm}_n\left(Y^C+2m_BX^{BC}\big|X\right)=\overline{\lambda}\,\theta^{\mp}_m\left(Y|X\right)\theta^{\pm}_{m+n}\left(Y|X\right), \tag{74}$$

не являются симметриями (12). Тем не менее, для $m=-n$ композиция квазисдвига и комплексного сопряжения является инволютивной линейной симметрией K,

$$K\,\theta^{\pm}_{n}\left(Y|X\right):=\overline{\mathcal{S}_{-n}\,\theta^{\pm}_{n}\left(Y|X\right)}=\theta^{\pm}_{-n}\left(Y|X\right), \quad K^2=\mathrm{Id}. \tag{75}$$

Прямая проверка даёт

$$K\,\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}=-\mathcal{B}^{\pm}{}_{C}\,K \quad \text{and} \quad K\,e^{iN_C\,\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}}=e^{-iN_C\,\mathcal{A}_{\pm}{}^{C}}\,K, \tag{76}$$

а значит K – оператор Клейна (см. например [37]). Он удваивает симметрии уравнения (12)

$$\varepsilon\left(e^{i\,\mathcal{A}_{\pm}};\mathcal{B}^{\pm}\right)=\eta\left(e^{i\,\mathcal{A}_{\pm}};\mathcal{B}^{\pm}\right)+K\,\widetilde{\eta}\left(e^{i\,\mathcal{A}_{\pm}};\mathcal{B}^{\pm}\right). \tag{77}$$

2.4 Заряды

2.4.1 Зарядовые компоненты и поверхности интегрирования

Сохраняющиеся заряды могут быть представлены в виде интегралов от замкнутых на уравнениях движения (on-shell) дифференциальных форм. Такие формы строятся из произвольных полей ранга два [28, 30, 35], и, в частности, из билинейных токов (37). В некомпактном случае замкнутая on-shell дифференциальная M-форма имеет вид [30] (см. также [28])

$$\Omega\left(J_\eta\right)=W^1\wedge\ldots\wedge W^M\;\; J_\eta\left(Y_{1,2}\left(U,V\right)|X\right)\big|_{U=0}, \tag{78}$$

где U,V определены в (44), а W^A – операторно-значная 1-форма

$$W^A=\mathrm{d}V^A+i\,\mathrm{d}X^{AB}\,\frac{\partial}{\partial U^B}. \tag{79}$$

Сохраняющийся заряд получается интегрированием по пространственной по переменным X [30] M-мерной поверхности $\Sigma\subset\mathcal{M}_M\times\mathbb{R}^M$ (где $\mathbb{R}^M$ параметризована переменными V^A),

$$\mathrm{Q}_\eta=\int_\Sigma\Omega\left(J_\eta\right). \tag{80}$$

Заряд (80) не зависит от локальных деформаций Σ так как $\mathrm{d}\Omega\left(J_\eta\right)=0$ при условии выполнения развёрнутых уравнений. Ненулевые заряды соответствуют on-shell когомологиям де Рама для форм (78). Как показано в [30], в случае некомпактного пространства ненулевые заряды представлены $\widetilde{\mathfrak{B}}$-независимыми параметрами $\eta\left(\mathfrak{B}\right)$. Иными словами, для данного $\eta\big(\mathfrak{B},\widetilde{\mathfrak{B}}\big)$ существует такой $\eta'\left(\mathfrak{B}\right)$, что $\Omega\left(J_{\eta'}\right)-\Omega\left(J_\eta\right)=\mathrm{d}\omega$.

Другой набор – дуальных замкнутых форм $\widetilde{\Omega}\,(J_{\widetilde{\eta}})$ строится посредством $U \leftrightarrow V$ [30]. Нетривиальные сохраняющиеся заряды для таких форм задаются параметрами $\widetilde{\eta}(\widetilde{\mathfrak{B}})$. Следовательно, полный набор сохраняющихся зарядов удваивается, что соответствует $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной алгебре высших спинов [30]. Для определённости, в данной работе детальное рассмотрение отведено формам (78), в то время как дуальные заряды могут быть рассмотрены полностью аналогично.

Для Y-периодического случая ситуация несколько иная. Теперь функции (56) определены на торе $\mathcal{T}_M \times T^M := \left(\mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M\right)/L$ где $L \subset \mathcal{M}_M \times \mathbb{R}^M$ – решётка периодов для перемасштабированных координат (53)

$$L = \left\{ Y^A = 2\pi\, p,\ X^{AA} = 2\pi\, q,\ X^{AB}\big|_{A\neq B} = \pi\, r \text{ for } p, q, r \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{81}$$

Поверхность интегрирования Σ является M-мерным циклом на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$ и, таким образом, может принадлежать различным гомотопическим классам, которые, как можно ожидать, дают различные сохраняющиеся заряды.

В периодическом случае вопрос о возможности устранения зависимости параметров симметрии от $\widetilde{\mathfrak{B}}$ (67) требует пересмотрения. Дальнейшей целью будет отыскание существенной зависимости параметров симметрии от $\mathfrak{B}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}$, параметризующей on-shell когомологию в периодическом случае.

Для параметров (67) и периодических полей (56) замкнутые формы (78) имеют вид

$$\begin{aligned}\Omega\,(J_\eta) = \sum_{m,n,k,l} &\left(\mathrm{d}\,V^A + (m+n+k-l)_C\, \mathrm{d}\,X^{CA}\right)^{\wedge M} \\ &c^+_m c^-_n\, \eta_{kl} \left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right), i\left(m-n+\frac{k+l}{2}\right)\right)\cdot \\ &\cdot \exp\left[i\,(m-n+k+l)_B \left(V^B + (m+n+k-l)_D\ X^{DB}\right)\right],\end{aligned} \tag{82}$$

где $\left(W^A\right)^{\wedge M} := W^1 \wedge \ldots \wedge W^M$. Форма (82) определена на $\mathcal{T}_M \times T^M$, где спинорный сектор T^M параметризован переменными $V^A \in [0, 2\pi)$. Результат интегрирования (82) по циклу в $\Sigma \subset \mathcal{T}_M \times T^M$ даёт

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \Omega\,(J_\eta) = \sum_{m,n,k,l} c^+_m c^-_n\, \eta_{kl} &\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right), i\left(m-n+\frac{k+l}{2}\right)\right)\cdot \\ &\mathrm{q}_\Sigma^{(m-n+k+l,\, m+n+k-l)},\end{aligned} \tag{83}$$

где

$$\mathrm{q}_\Sigma^{(\nu,\widetilde{\nu})} := \int_\Sigma \mathrm{d}w^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}w^M\, e^{i\nu_C\, w^C}, \qquad w^A := V^A + \widetilde{\nu}_C\, X^{CA} \tag{84}$$

будет называться *зарядовой компонентой*, где

$$\nu_C = (m-n+k+l)_C\,, \quad \widetilde{\nu}_C = (m+n+k-l)_C\,. \tag{85}$$

Зарядовые компоненты не зависят от локальных деформаций цикла Σ по причине замкнутости формы (84).

Интегрирования (80) и (84) следует проводить по *пространственно-подобным M-циклам.* Пространственно-подобные направления в $\mathcal{M}_M$ соответствуют бесследовой части X^{AB} [18]

$$\sum_{A=1}^{M} X^{AA} = 0. \tag{86}$$

Рассмотрим следующую параметризацию $\mathcal{M}_M$ переменными $t, y_{i,j+1}, z_i$ ($i \leq j$ and $i, j = 1...M-1$):

$$\begin{gathered} X^{11} = z_1,\ X^{22} = -z_1 + z_2, ..., X^{M-1,M-1} = -z_{M-2} + z_{M-1}, X^{MM} = t - z_{M-1}, \\ y_{i,j+1} = X^{i,j+1} = X^{j+1,i}. \end{gathered} \tag{87}$$

Здесь $t = \sum_{A=1}^{M} X^{AA}$ параметризует время, в то время как y и z, отвечающие бесследовой части X^{AB} – пространственные координаты. Отметим, что преобразование (87) принадлежит $\mathrm{SL}\left(\frac{M(M+1)}{2}\middle|\mathbb{Z}\right)$, а потому сохраняет решётку (81) и, таким образом, действует на торе $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{M}_M$.

Свобода в выборе параметризации пространственных направлений (86), т.е. бесследовой части X^{AB} не влияет на получаемые результаты. Различные параметризации, являющиеся результатом преобразований переменных X^{AB} сохраняют решётку и приводят к эквивалентным наборам сохраняющихся зарядов. Действительно, в таком случае фундаментальные циклы для одной параметризации выражаются целочисленными комбинациями циклов для другой. Но то же оказывается верным и для сохраняющихся зарядов, так как последние являются интегралами по M-мерным пространственным циклам на $\mathcal{T}_M \times T^M$. Более того, различные параметризации $\mathcal{T}_M \times T^M$, получающиеся действием группы $\mathrm{SL}\left(\frac{M(M+1)}{2} + M\middle|\mathbb{Z}\right)$ на переменных X^{AB}, Y^A приводят к эквивалентным системам зарядов.

Рассмотрим подробно пример параметризации (87). Рассмотрим фундаментальные пространственно-подобные M-циклы $\{\sigma_{\mathsf{a}}\}$ на $\mathcal{T}_M \times T^M$ с числом намотки равным 1 параметризованные M попарно различными переменными y, z и V. Один из таких циклов σ_0 является пространством T^M и параметризуется переменными V – он будет в дальнейшем называться *низшим*, в то время как остальные пространственно-подобные циклы будут называться *высшими.* Любой пространственно-подобный цикл Σ гомотопен сумме фундаментальных циклов

$$\Sigma = \sum_{\mathsf{a}} b_{\mathsf{a}} \sigma_{\mathsf{a}}, \tag{88}$$

где коэффициенты $b_{\mathsf{a}} \in \mathbb{Z}$ соответствуют числам намотки вдоль соответственных фундаментальных циклов.

Будучи линейными функционалами, определёнными на пространстве M-циклов, зарядовые компоненты (84) определяются своими значениями $\mathrm{q}_{\sigma_{\mathsf{a}}}^{(\nu,\widetilde{\nu})}$ на фундаментальных циклах. Используя параметризацию (87) для (84) и полагая $t=0$, получается сумма мономов степени M по переменным $\mathrm{d}V, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, которые соответствуют интегрированию по фундаментальным циклам. Явным вычислением нетрудно проверить, что гдя любого σ_{a}

$$\mathrm{q}_{\sigma_{\mathsf{a}}}^{(\nu,\widetilde{\nu})} \propto p_{\sigma_{\mathsf{a}}}\left(\widetilde{\nu}\right)\, \delta_{\nu,0}\,, \qquad \delta_{\nu,0} := \delta_{\nu_1,0}\ldots\delta_{\nu_M,0}\,, \tag{89}$$

где $p_{\sigma_{\mathsf{a}}}\left(\widetilde{\nu}\right)$ – однородный полином от $\widetilde{\nu}_A$. Действительно, формула (89) получается в результате замены переменных w^A в (84) на те из V, y, z (87), которые параметризуют σ_{a}, причём $p_{\sigma_{\mathsf{a}}}\left(\widetilde{\nu}\right)$ является якобианом данного преобразования. Как результат, для любого цикла σ_{a} имеется линейное отображение $F_{\mathsf{a}}\left[\widetilde{\nu}\right]$ переменных ν, приводящее к (89) в виде

$$\mathrm{q}_{\sigma_{\mathsf{a}}}^{(\nu,\widetilde{\nu})} \propto \det F_{\mathsf{a}}\left[\widetilde{\nu}\right]\, \delta_{F_{\mathsf{a}}[\widetilde{\nu}]\nu,0}. \tag{90}$$

Вообще говоря, различные циклы могут давать одинаковые полиномы. Так как зарядовые компоненты (84) являются линейными функциями на циклах, для любого цикла Σ (88)

$$\mathrm{q}_{\Sigma}^{(\nu,\widetilde{\nu})} \propto p_{\Sigma}\left(\widetilde{\nu}\right)\, \delta_{\nu,0}\,, \qquad p_{\Sigma} = \sum_{\mathsf{a}} b_{\mathsf{a}} p_{\sigma_{\mathsf{a}}}\,. \tag{91}$$

Полезным следствием выражения (91) является выражение для зарядовых компонент для любого цикла в терминах таковых для фундаментального цикла:

$$\mathrm{q}_{\Sigma}^{(\nu,\widetilde{\nu})} \propto p_{\Sigma}\left(\widetilde{\nu}\right)\, \mathrm{q}_{\sigma_0}^{(\nu,\widetilde{\nu})}\,. \tag{92}$$

Отметим, что $p_{\sigma_0}\left(\widetilde{\nu}\right) \propto 1$.

2.4.2 On-shell когомологии и нетривиальные заряды

Зависимость от $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$

В данном разделе будет показано, что по аналогии со случаем некомпактного пространства [30] зависимость от осцилляторов $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$ может быть исключена из параметризации ненулевых зарядов. А именно, для заданного параметри симметрии $\eta_{kl}\big(\mathfrak{B}_A, \widetilde{\mathfrak{B}}_B\big)$ можно построить другой параметр

$$\eta'_{kl}\big(\mathfrak{B}_A\big) = \eta_{kl}\big(\mathfrak{B}_A, -i\frac{k+l}{2}\big), \tag{93}$$

зависящий только от осцилляторов $\mathfrak{B}_A$ такой, что дифференциальные формы (82) с параметрами $\eta_{kl}\big(\mathfrak{B}_A, \widetilde{\mathfrak{B}}_B\big)$ и $\eta'_{kl}\big(\mathfrak{B}_A\big)$ отличаются на точную форму.

Чтобы убедиться в этом явно, ввиду выражений (82), (84), (85) и (93),

$$\Omega\left(J_{\eta}\right)-\Omega\left(J_{\eta'}\right)=\sum_{m,n,k,l}\left(\mathrm{d}w^{A}\right)^{\wedge M}c_{m}^{+}c_{n}^{-}\exp\left[i\nu_{B}w^{B}\right]$$
$$\Delta\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),i\left(m-n+\frac{k+l}{2}\right)\right)\ ,\quad(94)$$

где

$$\Delta\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),i\left(m-n+\frac{k+l}{2}\right)\right)=$$
$$=\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),i\left(m-n+\frac{k+l}{2}\right)\right)-\eta'_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right)\right)=$$
$$=\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),-i\frac{k+l}{2}+it\,\nu\right)=$$
$$=i\nu_{C}\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\,\frac{\partial\eta_{kl}}{\partial\widetilde{\mathfrak{B}}_{C}}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),-i\frac{k+l}{2}+it\,\nu\right).\quad(95)$$

Таким образом
$$\Omega\left(J_{\eta}\right)-\Omega\left(J_{\eta'}\right)=\mathrm{d}\beta,\quad(96)$$

где

$$\beta\propto\sum_{m,n,k,l}c_{m}^{+}c_{n}^{-}\,\varepsilon_{A_{1}\ldots A_{M}}\,\mathrm{d}w^{A_{1}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}w^{A_{M-1}}\,e^{i\nu_{C}\,w^{C}}\cdot$$
$$\cdot\int_{0}^{1}\mathrm{d}t\,\frac{\partial\eta_{kl}}{\partial\widetilde{\mathfrak{B}}_{A_{M}}}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right),-i\frac{k+l}{2}+it\,\nu\right).\quad(97)$$

Зависимость от $\mathfrak{B}^{C}$ и $\widetilde{\mathfrak{B}}^{C}$ Параметры симметрии (68) с редуцированной зависимостью от $\widetilde{\mathfrak{B}}_{A}$ имеют вид

$$\eta\big(\mathfrak{B}_{C};\mathfrak{B}^{A},\widetilde{\mathfrak{B}}^{B}\big)=\sum_{|N|_{2}=|\widetilde{N}|_{2}}\eta_{N,\widetilde{N}}\left(\mathfrak{B}_{C}\right)\,e^{iN_{A}\,\mathfrak{B}^{A}}e^{i\widetilde{N}_{B}\,\widetilde{\mathfrak{B}}^{B}}.\quad(98)$$

Согласно случаю некомпактного пространства [30], можно ожидать, что осцилляторы $\mathfrak{B}^{A}$ играют главную роль для параметризации нетривиальных зарядов. С другой стороны, так как для параметра (68) периодичность влечёт $|N|_{2}=|\widetilde{N}|_{2}$, зависимость от $\widetilde{\mathfrak{B}}^{A}$ не может быть полностью исключена в случае периодического пространства. Действительно, параметры (98), которые зависят только от осцилляторов $\mathfrak{B}$,

$$\eta\big(\mathfrak{B}\big)=\sum_{N}\eta_{N}\left(\mathfrak{B}_{C}\right)\,e^{2iN_{A}\,\mathfrak{B}^{A}},\quad(99)$$

дают следующие заряды для низшего цикла σ_0 (см. (83), (67)-(68) и (92))

$$\mathrm{Q}_\eta \propto \sum_{m,n,N} c_m^+ c_n^- \, \eta_N \left(-i\left(m+n\right)\right) \, \delta_{m-n+2N,0}, \tag{100}$$

где c_m^+ и c_n^- входят в Q_η так, что $|m|_2 = |n|_2$. Последнее условие означает, что параметры вида (99) не исчерпывают всего набора сохраняющихся зарядов. Ввиду того, что зарядовые компоненты (91) пропорциональны $\delta_{m-n+2N,0}$ для любого цикла Σ, приведенное рассуждение верно и в общем случае. В дальнейшем рассмотрение будет сосредоточено на интегрировании по низшему циклу σ_0, причём в следующем разделе будет показано, что этого достаточно для построения полной системы сохраняющихся зарядов.

Зависимость от осцилляторов $\widetilde{\mathfrak{B}}^A$ можно редуцировать следующим образом. Заряд для σ_0, соответствующий параметру (98)

$$\mathrm{Q}_\eta \propto \sum_{m,n,|N|_2=|\widetilde{N}|_2} c_m^+ c_n^- \, \eta_{N,\widetilde{N}} \left(-i\left(m+n-\frac{\widetilde{N}}{2}\right)\right) \, \delta_{m-n+N,0}. \tag{101}$$

Пусть для $\eta_{N,\widetilde{N}}$ определена градуировка $\Gamma = |N|_2 \in \mathbb{Z}_2{}^M$. Так как заряд зависит только от следующей комбинации параметров

$$\eta_N\left(-ik\right) = \sum_{\widetilde{N}:|\widetilde{N}|_2=\Gamma} \eta_{N,\widetilde{N}} \left(-ik + i\,\frac{\widetilde{N}}{2}\right), \tag{102}$$

он может быть в одинаковой степени представлен любым из слагаемых с $|\widetilde{N}|_2 = \Gamma$. В простейшем случае это

$$\eta^{(\pm\Gamma)} = \sum_{N:|N|_2=\Gamma} \eta_N\left(\mathfrak{B}_C\right) \, e^{iN_A \mathfrak{B}^A} e^{\pm i\Gamma_B \widetilde{\mathfrak{B}}^B}. \tag{103}$$

Антиавтоморфизм ρ действует на (103) следующим образом

$$\rho\left(\eta^{(\pm\Gamma)}\right) = \eta^{(\mp\Gamma)}. \tag{104}$$

Ввиду инволютивности ρ любой параметр η разлагается на ρ-четную и ρ-нечётную составляющие

$$\eta^{\pm} = \frac{1\pm\rho}{2}\,\eta. \tag{105}$$

Для случая $\Gamma = 0$, $\eta^- = 0$.

Отметим, что звёздочное произведение градуированных параметров (103) вообще говоря не отвечает структуре (103) потому что $\Gamma + \Gamma' \notin \mathbb{Z}_2{}^M$. Тем не менее, от параметров (103) не требуется, чтобы они замыкались в алгебру: они будут использованы исключительно для подсчёта зарядов, которые равны

$$\mathrm{Q}_\eta = \sum_{m,n:|m-n|_2=\Gamma} c^+_m c^-_n \, \eta^{(\pm\Gamma)}_{n-m}\left(-i\left(m+n\right)\right) \,, \qquad \eta^{(\pm\Gamma)}_N\left(k\right) = \eta_N\left(k \pm \frac{i\Gamma}{2}\right) . \tag{106}$$

Градуировку $\Gamma \in \mathbb{Z}_2{}^M$ можно проинтерпратировать как разделяющую между бозонными и фермионными степенями свободы, что допускает обобщение рассматриваемой периодической конструкции также на анти- периодические условия (условия Неве-Шварца). Однако такое исследование выходит за рамки данной работы.

Нетривиальные дуальные заряды, получающиеся посредством замены $V \leftrightarrow U$ в (78) параметризуются

$$\widetilde{\eta}^{(\widetilde{\Gamma})} = \sum_{\widetilde{N}:|\widetilde{N}|_2=\widetilde{\Gamma}} \widetilde{\eta}_{\widetilde{N}}\big(\widetilde{\mathfrak{B}}_C\big)\, e^{i\widetilde{N}_A\,\widetilde{\mathfrak{B}}^A} e^{i\widetilde{\Gamma}_B\,\mathfrak{B}^B} \tag{107}$$

и имеют форму

$$\widetilde{\mathrm{Q}}_{\widetilde{\eta}} = \sum_{m,n:|m-n|_2=\widetilde{\Gamma}} c^+_m c^-_n \, \widetilde{\eta}^{(\widetilde{\Gamma})}_{m+n}\left(i\left(m-n\right)\right) \,, \qquad \widetilde{\eta}^{(\widetilde{\Gamma})}_N\left(k\right) = \widetilde{\eta}_N\left(k + \frac{i\widetilde{\Gamma}}{2}\right) . \tag{108}$$

Отметим, что при $\widetilde{\Gamma} = 0$ параметры (107) не зависят от $\mathfrak{B}$, что даёт $\widetilde{\eta}^{\pm} = 0$ в случае $\widetilde{\eta}\big(-\widetilde{\mathfrak{B}}\big) = \mp\, \widetilde{\eta}\big(\widetilde{\mathfrak{B}}\big)$.

2.4.3 Некомпактный предел

$\mathbb{Z}_2{}^M$-градуировка Γ, учитывающая чётность компонент N_A в (103) исчезает в пределе некомпактного пространства, т.е. при $\ell \to \infty$. Действительно, в терминах осцилляторов (41) перемасштабированные осцилляторы $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$ имеют вид $\dfrac{2\pi}{\ell^{(C)}}\widetilde{\mathfrak{B}}_C$, что влечёт

$$e^{i\frac{2\pi}{\ell^{(A)}}\widetilde{\mathfrak{B}}^A} \xrightarrow{\ell\to\infty} 1. \tag{109}$$

Таким образом, воспроизводится результат для случая некомпактного пространства [30], когда нетривиальные заряды параметризуются исключительно осцилляторами $\mathfrak{B}$. Компоненты Фурье c_n (56) переходят в их аналоги $c\left(\xi\right)$(15) при $\xi = \dfrac{2\pi}{\ell}n$

$$\frac{\left(2\pi\right)^M}{\ell^{(1)}...\ell^{(M)}} \sum_n \,... \xrightarrow{\ell\to\infty} \int \mathrm{d}^M\xi \,... \,. \tag{110}$$

В пределе $\ell \to \infty$ также воспроизводится независимость результата интегрирования от цикла [30]. А именно, было показано, что зарядовые компоненты (84) на фундаментальных циклах равны (90). Они различны для различных циклов потому что $F_{\text{a}}[\widetilde{\nu}]$ соответствует данному фундаментальному циклу σ_{a}. В пределе некомпактного пространства зависимость зарядовых компонент от цикла исчезает следующим образом:

$$\frac{(2\pi)^M}{\ell^{(1)}...\ell^{(M)}} \det F[\widetilde{\nu}]\ \delta_{F[\widetilde{\nu}]\nu,0} \xrightarrow{\ell\to\infty} \det F[\widetilde{\nu}] \cdot \delta(F[\widetilde{\nu}]\nu) = \delta(\nu)\,, \tag{111}$$

где $\delta(\nu)$ в правой части (111) – это дельта-функция Дирака.

2.5 Действие симметрии высших спинов на циклах

Интересным следствием рассмотренного подхода является то, что заряды, получающиеся интегрированием по любому циклу на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$ эквивалентны таковым для низшего цикла при должной модификации параметра. А именно, редуцировав зависимость от $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$ в (82), получаем

$$\begin{aligned}\Omega(J_\eta) = \sum_{m,n,k,l} \left(\mathrm{d}\,V^A + (m+n+k-l)_C\,\mathrm{d}\,X^{CA}\right)^{\wedge M} c^+_m c^-_n \cdot \\ \eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right)\right) \cdot \\ \exp\left[i(m-n+k+l)_B\left(V^B + (m+n+k-l)_D\ X^{DB}\right)\right].\end{aligned} \tag{112}$$

Заряд, полученный для (112) интегрированием по циклу Σ равен заряду, полученному путём интегрирования по низшему фундаментальному циклу $\sigma_0 = V^1...V^M$ с новым параметром, построенным следующим образом. Пусть

$$\eta'_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right)\right) = p_\Sigma(m+n+k-l)\,\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right)\right). \tag{113}$$

Интегрирование (78) с параметром η' (113) по циклу σ_0 даёт такой же заряд, как и интегрирование с параметром $\eta_{kl}\left(-i\left(m+n+\frac{k-l}{2}\right)\right)$ по циклу Σ. Действительно, используя (92), интегрирование по поверхности Σ с параметром η даёт дополнительный фактор $p_\Sigma(m+n+k-l)$, в то время как для (113) он уже включён в η'.

В терминах звёздочного произведения (47) выражение (113) имеет вид

$$\eta'\left(\mathfrak{B}_C; \mathfrak{B}^A, \widetilde{\mathfrak{B}}^B\right) = p_\Sigma(i\,\mathfrak{B}_C) * \eta\left(\mathfrak{B}_C; \mathfrak{B}^A, \widetilde{\mathfrak{B}}^B\right). \tag{114}$$

Это означает, что заряд для высших циклов Σ, отвечающий симметрии η равняется заряду, полученному для низшего цикла и отвечающему более высокой симметрии $p_\Sigma * \eta$.

Будем рассматривать заряды как спаривания между циклами и параметрами симметрии

$$\langle \sigma_{\mathsf{a}}, \eta \rangle = \int_{\sigma_{\mathsf{a}}} \Omega \left(J_\eta \right) . \tag{115}$$

Рассмотрим преобразование Ξ_{a}, отображающее низший цикл σ_0 в соответвенный высший $\sigma_{\mathsf{a}} = \Xi_{\mathsf{a}} \left(\sigma_0 \right)$. Согласно (114)

$$\langle \Xi_{\mathsf{a}} \left(\sigma_0 \right), \eta \rangle = \langle \sigma_0, p_{\sigma_{\mathsf{a}}} * \eta \rangle \ . \tag{116}$$

В результате чего имеем, что преобразование параметров симметрии (114) является сопряжённым к преобразованию перехода от низшего цикла к высшему Σ, представленному в виде целочисленной комбинации $\Sigma = \sum_{\mathsf{a}} b_{\mathsf{a}} \, \Xi_{\mathsf{a}} \left(\sigma_0 \right)$ (см. (88)). Следует отметить, что только определённые полиномы $p_{\sigma_{\mathsf{a}}}$ описанные в (89) и их целочисленные комбинации соответствуют отображениям (114) – сопряжённым к отображениям низшего цикла в высшие. Важным результатом является то, что любой сохраняющийся заряд получается интегрированием по спинорному пространству, т.е. по циклу σ_0, для некоторого параметра $\eta\big(\mathfrak{B}_C; \mathfrak{B}^A, \widetilde{\mathfrak{B}}^B\big)$. В некотором смысле это подобно случаю некомпактного пространства, где, для данного параметра η, сохраняющийся заряд не зависит от поверхности интегрирования. В периодическом случае это соответствует тому, что всегда возможно осуществить переход к интегрированию по спинорному пространству, при условии что параметр симметрии преобразуется согласно (114), включая в игру алгебру высших спинов.

Преобразование (116) соотносит различные геометрические структуры с алгебраическими свойствами симметрии высших спинов, а именно: высшие циклы интегрирования соответствуют высшим симметриям. Последние же естественным образом включены в рассматриваемый подход. С другой стороны, в случае более привычных низкосимметричных подходов оказывается, что подобному соответствию геометрических структур и алгебры симметрий места не находится.

Интересной представляется задача описанияи обратного преобразования, т.е. условий на параметры симметр η, которые позволили бы получить заряд путём интегрирования по высшему циклу Σ для некоторого параметра η' такого, что $\langle \sigma_0, \eta \rangle = \langle \Sigma, \eta' \rangle$. Согласно (116) это возможно при условии $\eta = p_\Sigma * \eta'$. Анализ данного вопроса нетривиален и требует определение соответствующего класса (быть может быть неполиномиальных) функций η'. Подробное рассмотрение данного вопроса лежит за рамками данной работы.

2.6 Алгебра зарядов и симметрии

2.6.1 Заряды как операторы симметрии

Согласно теореме Нётер, сохраняющиеся заряды отвечают симметриям системы ранга один (12). Будучи построенными в терминах полей ранга два, они могут быть превращены в операторы симметрии, действующие на полях. Посредством квантования полей ранга один амплитуды Фурье $c_n^{\pm}$ превращаются в операторы $\hat{\mathfrak{c}}_n^{\pm}$ с ненулевыми коммутационными соотношениями (см. [18] о процедуре квантования и [30] об алгебре зарядов). Аналогично конструкции, предложенной в [28], ненулевые коммутационные соотношения сводятся к

$$\left[\hat{\mathfrak{c}}_m^{-}, \hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\right] = \delta_{mn}. \tag{117}$$

Квантованные сохраняющиеся заряды (106) становятся операторами, параметризованными функциями $\eta^{(\Gamma)}$ (103)

$$\hat{\mathrm{Q}}_\eta = \sum_{m,n} \eta^{(\Gamma)}_{n-m} \left(-i\left(m+n\right)\right) \, \hat{\mathfrak{c}}_m^{+} \hat{\mathfrak{c}}_n^{-} \, . \tag{118}$$

Также как и в случае некомпактного пространства [30] они образуют алгебру относительно коммутатора

$$\left[\hat{\mathrm{Q}}_{\eta'}, \hat{\mathrm{Q}}_\eta\right] = \hat{\mathrm{Q}}_{[\eta', \eta]_\star} \, , \tag{119}$$

где $\eta\left(k; v\right) = \sum_N \, \eta_N\left(k\right) e^{iNv}$ $\left(k_B \in \mathbb{Z}, v^C \in [0, 2\pi)\right)$ – символы Моял-подобного звёздочного произведения

$$\left(f \star g\right)\left(k; v\right) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^M} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}^M u \, \mathrm{d}^M w}{\left(2\pi\right)^{2M}} f\left(k+m; v+u\right) g\left(k+n; v+w\right) \exp\left[i\left(m_C w\right.\right.$$

и соответственный звёздочный коммутатор определяется как $[f, g]_\star = f \star g - g \star f$, $\left[k_C, e^{iN_B v^B}\right]_\star = -2N_C \, e^{iN_B v^B}$. Взаимно-однозначное соответствие между символами вида

$$\eta\left(k; v\right) = \sum_N \eta_N\left(-ik\right) e^{iNv} \tag{121}$$

и зарядами (118) задаётся подстановкой $k \leftrightarrow m+n$ и $N \leftrightarrow n-m$ для компонент Фурье $\eta_N\left(-ik\right)$. Заряд $\hat{\mathrm{Q}}_{[\eta', \eta]_\star}$ (119) соответствует символу $[\eta', \eta]_\star\left(k; v\right)$. Дуальный набор зарядов для параметров η строится по символам $K \star \eta$, где K – оператор Клейна:

$$K \star K = 1, \quad K \star f\left(k; v\right) = f\left(-k; -v\right) \star K. \tag{122}$$

В терминах звёздочного произведения (120) он представлен дельта-функцией

$$K = \left(2\pi\right)^M \delta_{k,0} \, \delta\left(v\right). \tag{123}$$

Таким образом, алгебра симметрий оказывается $\mathbb{Z}_2$-градуированной по оператору K параметризуется символами в виде $\varepsilon = \eta + K \star \eta'$, причём операторы симметрии удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{\mathrm{Q}}_{\varepsilon'}, \hat{\mathrm{Q}}_\varepsilon\right] = \hat{\mathrm{Q}}_{[\varepsilon', \varepsilon]_\star}. \tag{124}$$

Это является прямым обобщением конструкции для некомпактного пространства [30].

Прямым вычислением проверяется, что для параметров $\eta'^{(\Lambda)}$ и $\eta^{(\Gamma)}$ с определёнными градуировками Λ и Γ, их произведение $\eta'^{(\Lambda)} \star \eta^{(\Gamma)}$ также имеет определённую градуировку $\Lambda + \Gamma \mod 2$.

Хоть операторы Клейна (75) и (122) различны: первый действует на полях ранга один (55) согласно (75), в то время как второй возникает для звёздочной алгебры (120) параметров (121) квантованных зарядов (118), имеется явное соответствие между операторами (75) и (122), что позволяет использовать одинаковое обозначение для них обоих. А именно, заряды (118) действуют на квантованные поля $\hat{\mathfrak{C}}^{\pm}(Y|X) = \sum_n \hat{\mathfrak{c}}_n^{\pm}\theta_n^{\pm}(Y|X)$ посредством коммутатора. Например, для параметров $\mathfrak{B}_C$ и $\eta_N = e^{iN_B\,\mathfrak{B}^B} e^{i|N_C|_2\widetilde{\mathfrak{B}}^C}$ соответствующие заряды

$$\hat{\mathrm{Q}}_{\mathfrak{B}_C} = -2i\sum_n n_C\,\hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\hat{\mathfrak{c}}_n^{-}, \qquad \hat{\mathrm{Q}}_{\eta_N} = \sum_n \hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\hat{\mathfrak{c}}_{n+N}^{-} \tag{125}$$

действуют на $\hat{\mathfrak{C}}^{+}(Y|X)$ следующим образом

$$\left[\hat{\mathrm{Q}}_{\mathfrak{B}_C}, \hat{\mathfrak{C}}^{+}\right] = -2\sum_n in_C\,\hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\theta_n^{+}, \quad \left[\hat{\mathrm{Q}}_{\eta_N}, \hat{\mathfrak{C}}^{+}\right] = \sum_n \hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\theta_{n+N}^{+}. \tag{126}$$

Что эквивалентно действию (57) операторов $-2\,\mathcal{B}^{+}{}_C$ и $e^{iN_C\,\mathcal{A}_+{}^C}$ on $C^{+}(Y|X)$. Аналогично рассматриваются поля $\hat{\mathfrak{C}}^{-}(Y|X)$ и операторы $-2\,\mathcal{B}^{-}{}_C$ и $-e^{iN_C\,\mathcal{A}_-{}^C}$.

Дуальный набор зарядов (108) построенный посредством звёздочного произведения параметров (121) и оператора Клейна (122) соответствует операторам (57) посредством оператора K (75). А именно, для параметров симметрии $\widetilde{\mathfrak{B}}_C$ и $\widetilde{\eta}_N = e^{iN_B\,\widetilde{\mathfrak{B}}^B} e^{i|N_C|_2\mathfrak{B}^C}$ заряды даются выражениями

$$\hat{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}_{\widetilde{\mathfrak{B}}_C} = 2i\sum_n n_C\,\hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\hat{\mathfrak{c}}_{-n}^{-} \quad \text{and} \quad \hat{\tilde{\tilde{\mathrm{Q}}}}_{\widetilde{\eta}_N} = \sum_n \hat{\mathfrak{c}}_n^{+}\hat{\mathfrak{c}}_{N-n}^{-}. \tag{127}$$

Их действие на $\hat{\mathfrak{C}}^{+}(Y|X)$ аналогичено действию операторов

$$-\,2\,\mathcal{B}^{+}{}_C\,K \quad \text{и} \quad e^{iN_C\,\mathcal{A}_+{}^C}\,K \tag{128}$$

на $\acute{+}YX$, в то время как для $\hat{\mathfrak{C}}^{-}(Y|X)$ заряды (127) соответствуют операторам

$$-\,2\,K\,\mathcal{B}^{-}{}_C \quad \text{и} \quad -\,K\,e^{iN_C\,\mathcal{A}_-{}^C}, \tag{129}$$

которые действуют на $\acute{-}YX$ с оператором K, определённым согласно (75). Приведенные рассуждения делают явным соответствие между сохраняющимися зарядами и симметриями системы ранга одни (12).

2.6.2 Алгебра симметрии

Периодичность по переменным Y меняет симметрии системы ранга один по сравнению со случаем некомпактного пространства. Остаточная симметрия, уважающая периодичность, представлена операторами сохраняющихся зарядов (124) в виде функционалов от параметров симметрии (121), действующих на квантованных полях ранга один посредством коммутатора. Таким образом, симметрии системы ранга один генерируются символами преобразований симметрий, образованными мономами вида $K^r \star k_{C_1} ... k_{C_m}\, e^{in_B\, v^B}$ $(r = 0, 1)$, которые можно упаковать в производящую функцию

$$\mathrm{T}^r_{(n,\xi)}\,(k; v) = K^r \star e^{i\xi\, k + in\, v}, \quad \xi^C \in [0, 2\pi)\,,\; n \in \mathbb{Z}^M,\; r = 0, 1 \tag{130}$$

со звёздочным произведением (120). Многочлены по переменным k получаются дифференцированием по ξ^B в точке $\xi = 0$. Множество производящих функций (130) замкнуто по отношению к звёздочному коммутатору

$$\left[\mathrm{T}^q_{(m,\xi)}, \mathrm{T}^r_{(n,\zeta)}\right]_\star = \mathrm{T}^{|q+r|_2}_{((-)^r m+n,(-)^r\xi+\zeta)} e^{i(-)^r\left(m_C\zeta^C - n_C\xi^C\right)} - \mathrm{T}^{|q+r|_2}_{(m+(-)^q n,\xi+(-)^q\zeta)} e^{-i(-)^q\left(m_C\zeta^C - n_C\xi^C\right)}. \tag{131}$$

Генераторы с $q = r = 0$ образуют подалгебру с коммутационными соотношениями

$$\left[\mathrm{T}^0_{(m,\xi)}, \mathrm{T}^0_{(n,\zeta)}\right]_\star = 2i\,\sin\left(m_C\zeta^C - n_C\xi^C\right)\,\mathrm{T}^0_{(m+n,\xi+\zeta)}, \tag{132}$$

которая оказывается аналогичной синус-алгебре, предложенной в [36], где также была представлена её осцилляторная реализация. Отличие построенной алгебры заключается в том, что половина индексов в (130) – непрерывны, в то время как в случае синус-алгебры все они дискретны. Соотношения (131) удовлетворяют тождеству Якоби, а следовательно элементы (130) образуют алгебру Ли по отношению к звёздочному коммутатору (131). Эта бесконечномерная алгебра Ли и представляет симметрию системы ранга один (12) в случае периодичных переменных Y.

3 Амплитуды рассеяния как многочастичные заряды высших спинов

3.1 Развёрнутая формулировка свободный полей высших спинов

3.1.1 Полевые конфигурации

Развёрнутое уравнение ранга один имеет вид [62, 33]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}} + i\frac{\partial^2}{\partial y^a \partial \widetilde{y}^{\dot{a}}}\right)\mathcal{C}^1\left(y, \widetilde{y}|x\right) = 0, \tag{133}$$

где координаты $x^{a\dot{a}}$ со спинорными индексами $a, \dot{a} = 1, 2$ параметризуют 4-мерное пространство Минковского $\mathcal{M}_2$, а y^a, $\widetilde{y}^{\dot{a}}$ – вспомогательные переменные. Для полей $\mathcal{C}^1\left(y, \widetilde{y}|x\right)$, представимых в виде формального ряда по переменным y, $\widetilde{y}$, уравнение (133) описывает динамику калибровочно- инвариантных напряжённостей безмассовых полей всех спинов, включая таже поля низших спинов 0, 1/2 and 1, в четырёхмерном пространстве Минковского. В этом случае степени y, $\widetilde{y}$ кодируют спин и производные полей. Анализ σ_--когомологий позволяет исключить вспомогательные переменные из $\mathcal{C}^1\left(y, \widetilde{y}|x\right)$, что даёт набор примарных мультиспинорных полей

$$c\left(x\right), c_a\left(x\right), \widetilde{c}_{\dot{a}}\left(x\right), \dots, c_{a(2s)}, \widetilde{c}_{\dot{a}(2s)}, \dots, \tag{134}$$

представляющих (анти-)самодуальные компоненты напряжённостей полей спинов $0, 1/2, \dots, s, \dots$ и из всевозможные производные (см. [62]).

С точки зрения преобразования Фурье по переменным $y, \widetilde{y}$ уравнение (133) накладывает условие светоподобности на импульс полей

$$p_{a\dot{a}} = i\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}} \sim \mu_a \widetilde{\mu}_{\dot{a}}, \tag{135}$$

в форме, известной в рамках спинор-спирального формализма (см. например [44]), а также в формулировке теории ВС в гиперпространстве (см. обзор [63]). Напомним, что условие (135) действительно влечёт светоподобность импульса $p_{a\dot{a}}$ ввиду того, что $p^2 = \det p_{a\dot{a}}$.

Вообще говоря, массивные поля спинов $s = 1, 3/2, 2, \dots$ описываются 1-формами (калибровочными потенциалами)

$$\mathcal{W}\big(y, \widetilde{y}\big|x\big) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{W_{a_1 \dots a_m, \dot{a}_1 \dots \dot{a}_n}(x)}{m!n!} y^{a_1} \dots y^{a_m} \widetilde{y}^{\dot{a}_1} \dots \widetilde{y}^{\dot{a}_n}, \tag{136}$$

где $W_{a_1\dots a_m,\dot a_1\dots\dot a_n} = \mathrm{d}x^{c\dot c}\, w_{c|a_1\dots a_m,\dot c|\dot a_1\dots\dot a_n}$, и поля спина s идентифицируются условием $m+n = 2(s-1)$. Среди них есть электромагнитный потенциал W – поле спина $s=1$, а также поля тетрады $W_{a\dot a}$ и лоренцевой связности W_{ab}, $W_{\dot a\dot b}$ для спина $s=2$. На свободном уровне 0-формы $\mathcal{C}^1\,(y,\widetilde{y}|x)$, удовлетворяющие уравнени (133) связаны с потенциалами (136) посредством выражения

$$\mathcal{D}\mathcal{W} = H^{ab}\frac{\partial^2}{\partial y^a \partial y^b}\,\mathcal{C}^1\,(y,0|x) + \widetilde{H}^{\dot a\dot b}\frac{\partial^2}{\partial \widetilde{y}^{\dot a}\partial \widetilde{y}^{\dot b}}\,\mathcal{C}^1\,(0,\widetilde{y}|x)\,, \tag{137}$$

называемого центральной On-Mass-Shell теоремой [1]. В случае плоских координат $H^{ab} = \mathrm{d}x_{a\dot c}\wedge \mathrm{d}x_b{}^{\dot c}$, $\widetilde{H}^{\dot a\dot b} = \mathrm{d}x_{c\dot a}\wedge \mathrm{d}x^c{}_{\dot b}$, ковариантный дифференциал $\mathcal{D}$ нильпотентен, $\mathcal{D}^2=0$. Для данного спина s уравнение (137) эквивалентно следующему набору дифференциальных уравнений [64, 65]

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}W_{a(m),\dot a(n)} + m\,\theta\,(n-m)\,\mathrm{d}x_{a\dot c}\wedge W_{a(m-1),}{}^{\dot c}{}_{\dot a(n)} + \\ &\quad n\,\theta\,(m-n)\,\mathrm{d}x_{c\dot a}\wedge W^{c}{}_{a(m),\dot a(n-1)} = 0 \quad \text{for} \quad m+n = 2\,(s-1)\,, \quad m,n>0, \\ &\qquad\qquad \text{and} \quad \mathrm{d}W_{a(2(s-1))} = H^{aa}\,c_{a(2s)}, \quad \mathrm{d}W_{\dot a(2(s-1))} = \widetilde{H}^{\dot a\dot a}\,\widetilde{c}_{\dot a(2s)}\,, \end{aligned} \tag{138}$$

где $\theta\,(n) = 1(0)$ for $n \geq 0 (n<0)$. По индексам, обозначенным одной буквой, подразумевается симметризация.

Уравнения (137) (или, (138)) инвариантны относительно калибровочных преобразований $\delta\mathcal{W} = \mathcal{D}\epsilon$ с произвольной 0-формой вида

$$\epsilon = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_{a_1\dots a_m,\dot a_1\dots\dot a_n}(x)}{m!n!} y^{a_1}\dots y^{a_m}\,\widetilde{y}^{\dot a_1}\dots\widetilde{y}^{\dot a_n} \tag{139}$$

в качестве параметра. Согласно (138), калибровочно-инвариантные 0-формы $c_{a(2s)}$ и $\widetilde{c}_{\dot a(2s)}$ для спина s выражаются через $\lfloor s\rfloor$-ю производную поля $w_{a(m),\dot a(n)}$ с $|m-n|\leq 1$, где $\lfloor s\rfloor$ обозначает целую часть s.

Как известно, калибровочные потенциалы (136) необходимы для локальных выражений полевых взаимодействий. Потому именно 1-форму (136), а не 0-формы (133), служат главным элементов при вычислении амплитуд рассеяния. Тем не менее в рамках данной работы более удобным оказывается установление соответствия между зарядами ВС и амплитудами рассеяния в терминах 0-форм. Важно отметить, что так как амплитуды сами по себе являются нелокальными объектами, обе вышеупомянутые формулировки эквивалентны. Связь с 1-формами (136) будет обсуждаться в разделе 3.8.

Как показано в [33], уравнение (133) можно обобщить на тензорные степени полей ВС введением $\mathbf{r}\geq 2$ копий вспомогательных переменных y^a_I, $\widetilde{y}^{\dot a}_J$ (где $I,J = 1...\mathbf{r}$) и, соответственно, полей ранга $\mathbf{r}$ $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}\,(y,\widetilde{y}|x)$, которые подчиняются развёрнутому уравнению ранга $\mathbf{r}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{a\dot a}} + i\,\delta_{IJ}\frac{\partial^2}{\partial y^a_I \partial \widetilde{y}^{\dot a}_J}\right)\mathcal{C}^{\mathbf{r}}\,(y,\widetilde{y}|x) = 0. \tag{140}$$

Произведения $\mathbf{r}$ решений уравнения (133) $\prod_{I=1}^{\mathbf{r}} \mathcal{C}^1(y_I, \widetilde{y}_I|x)$ очевидным образом решают (140). Поле ранга два $\mathcal{C}^2(y, \widetilde{y}|x)$, которое удовлетворяет (140), кодирует сохраняющиеся токи ВС в четырёхмерном пространстве Минковского [33]. Поля ранга $\mathbf{r} > 2$ (также называемые *высшими токами*) были введены в [33]. Решения $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}(y, \widetilde{y}|x)$ уравнения (140) могут быть разложены по плоским волнам

$$\chi_{\mu,\widetilde{\mu}} \sim \exp\left[i\left(\mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\, x^{a\dot{a}} + \mu_{Ia}\, y_I{}^a + \widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\, \widetilde{y}_I{}^{\dot{a}}\right)\right]. \tag{141}$$

Следуя идее [28], уравнение (140) можно представить в виде уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка следующим образом. Рассмотрим разбиение $\mathbf{r} = m + \overline{m}$ и представим $\mathcal{C}^{\mathbf{r}}(y, \widetilde{y}|x)$ в виде половинного преобразования Фурье

$$\mathcal{C}^{\mathbf{r}}(y, \widetilde{y}|x) = \frac{1}{(2\pi)^{K\mathbf{r}}} \int \mathrm{d}^{Km}\lambda_{1\ldots m}\, \mathrm{d}^{K\overline{m}}\widetilde{\lambda}_{\overline{m+1\ldots \mathbf{r}}}\; e^{i\left(y^a_{\mathsf{i}}\lambda^{\mathsf{i}}_a + \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\bar{\mathsf{i}}}\widetilde{\lambda}^{\bar{\mathsf{i}}}_{\dot{a}}\right)}\; g^{(m,\overline{m})}\left(\lambda_{\mathsf{i}}, y_{\bar{\mathsf{i}}}; \widetilde{y}_{\mathsf{j}}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}}\Big| x\right), \tag{142}$$

где $\mathsf{i}, \mathsf{j} = 1 \ldots m$ and $\bar{\mathsf{i}}, \bar{\mathsf{j}} = \overline{m+1} \ldots \bar{\mathbf{r}}$. Уравнение (140), переписанное в терминах компонент Фурье $g^{(m,\overline{m})}$ является первого порядка по производным

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}} - \delta_{\mathsf{ij}}\,\lambda^{\mathsf{i}}_a \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{j}}} - \delta_{\bar{\mathsf{i}}\bar{\mathsf{j}}}\,\widetilde{\lambda}^{\bar{\mathsf{i}}}_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial y^{\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}}}\right) g^{(m,\overline{m})}\left(\lambda_{\mathsf{i}}, y_{\bar{\mathsf{i}}}; \widetilde{y}_{\mathsf{j}}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}}\Big| x\right) = 0, \tag{143}$$

а его характеристики

$$\lambda_{\mathsf{i}\,a},\; \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}\lambda_{\mathsf{i}\,a} \quad \text{and} \quad \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}},\,\dot{a}} y^a_{\bar{\mathsf{i}}} + x^{a\dot{a}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\,\dot{a}}, \tag{144}$$

где $\lambda_{\mathsf{i}\,a} = \delta_{\mathsf{ij}}\,\lambda^{\mathsf{j}}_a$ и $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\dot{a}} = \delta_{\bar{\mathsf{i}}\bar{\mathsf{j}}}\,\widetilde{\lambda}^{\bar{\mathsf{j}}}_{\dot{a}}$. Полезным являеся решение, не зависящее от пространственно-временных координат

$$\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} = \lambda_{\mathsf{i}\,a} y^a_{\bar{\mathsf{j}}} - \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\,\dot{a}} \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}. \tag{145}$$

Аналогичное выражение было рассмотрено в [46] для так называемого “link”-представления амплитуд рассеяния.

Удобно ввесто расширенное пространство $\mathbf{Cor}_2^{(m,\overline{m})} = \mathcal{M}_2 \times \mathbb{R}^{4\mathbf{r}}$, параметризованное пространственно-временными координатами $x^{a\dot{a}}$ вместе со спинорными координатами $y^a_{\bar{\mathsf{i}}}$, $\lambda_{\mathsf{i}a}$ ($2\mathbf{r}$ переменных) и $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}$, $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\dot{a}}$ ($2\mathbf{r}$ переменных), $\dim \mathbf{Cor}_2^{(m,\bar{b})} = 4 + 4\mathbf{r}$. On-shell условие (143) влечёт, что функции $g^{(m,\overline{m})}$ на $\mathbf{Cor}_2^{(m,\overline{m})}$ являются на самом деле функциями характеристик (144).

Нам понадобятся волновые решения (143) вида

$$\chi_{\mu,\widetilde{\mu}}\left(\lambda_{\mathsf{i}}, y_{\bar{\mathsf{i}}}; \widetilde{y}_{\mathsf{j}}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}}\Big| x\right) = \exp\left[i\left(\widetilde{\mu}^{\mathsf{i}}_{\dot{a}}\left(\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}\lambda_{\mathsf{i}\,a}\right) + \mu^{\bar{\mathsf{j}}}_a\left(y^a_{\bar{\mathsf{j}}} + x^{a\dot{a}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\,\dot{a}}\right)\right)\right] \cdot \prod_{\mathsf{j},\,a} \delta\left(\lambda^{\mathsf{j}}_a - \mu^{\mathsf{j}}_a\right) \prod_{\bar{\mathsf{j}},\,\dot{a}} \delta\left(\widetilde{\lambda}^{\bar{\mathsf{j}}}_{\dot{a}} - \widetilde{\mu}^{\bar{\mathsf{j}}}_{\dot{a}}\right), \tag{146}$$

где μ_{Ia} и $\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}$ – параметры (волновые векторы).

3.2 Дифференциальные формы замкнутые на уравнениях движения

Для данного решения $g^{(m,\overline{m})}$ уравнения (143) можно построить замкнутую на уравнениях движения (on-shell) дифференциальную $4\mathbf{r}$-форму на $\mathbf{Cor}_2^{(m,\overline{m})}$ [28]

$$\Omega^{(m,\overline{m})}[g] = \mathrm{d}^{2m}\lambda\, \mathrm{d}^{2\overline{m}}\widetilde{\lambda}\, \mathrm{d}^{2\overline{m}}\big(y + x\widetilde{\lambda}\big)\, \mathrm{d}^{2m}\big(\widetilde{y} + x\lambda\big)\, g^{(m,\overline{m})}\big(\lambda_{\mathsf{i}}, y_{\bar{\mathsf{i}}}; \widetilde{y}_{\mathsf{j}}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}}\big|x\big). \quad (147)$$

$\Omega^{(m,\overline{m})}[g]$ содержит максимальную степень по дифференциалам от характеристик (144), в то время как $g^{(m,\overline{m})}$ является функцией тех же характеристик ввиду of (143). В результате этого, дифференциал де Рама на $\mathbf{Cor}_2^{(m,\overline{m})}$,

$$\mathrm{d}_{\mathbf{Cor}} = \mathrm{d}\lambda_{\mathsf{i}a}\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathsf{i}a}} + \mathrm{d}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}} + \mathrm{d}y^a_{\bar{\mathsf{i}}}\frac{\partial}{\partial y^a_{\bar{\mathsf{i}}}} + \mathrm{d}\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{j}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{j}}} + \mathrm{d}x^{a\dot{a}}\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}}\,, \quad (148)$$

действует нулём на (147),

$$\mathrm{d}_{\mathbf{Cor}}\Omega^{(m,\overline{m})}[g] = 0\,. \quad (149)$$

Более подробно, так как $g^{(m,\overline{m})}$ – решение уравнения (143), это функция характеристик. Используя (147),

$$\frac{\partial}{\partial x^{a\dot{a}}}g^{(m,\overline{m})} = \left(\lambda_{\mathsf{i}a}\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}} + \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}\frac{\partial}{\partial y^a_{\bar{\mathsf{j}}}}\right) g^{(m,\overline{m})}, \quad (150)$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{\mathbf{Cor}}g^{(m,\overline{m})} = \Bigg(&\mathrm{d}\lambda_{\mathsf{i}a}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_{\mathsf{i}a}} - x^{a\dot{a}}\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}}\right) + \mathrm{d}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}} - x^{a\dot{a}}\frac{\partial}{\partial y^a_{\bar{\mathsf{j}}}}\right) + \\ &\mathrm{d}\big(y^a_{\bar{\mathsf{j}}} + x^{a\dot{a}}\,\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}\big)\frac{\partial}{\partial y^a_{\bar{\mathsf{j}}}} + \mathrm{d}\big(\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}\,\lambda_{\mathsf{i}a}\big)\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}}\Bigg)\, g^{(m,\overline{m})}, \quad (151)\end{aligned}$$

т.е. $\mathrm{d}_{\mathbf{Cor}}g^{(m,\overline{m})}$ пропорционально дифференциалам характеристик (144). Но $\Omega^{(m,\overline{m})}[g]$ (147) содержит максимальную степень по дифференциалам характеристик (144), что означает, что (149) – верно.

Нас будут интересовать плоские волны (146), что приводит к формам $\Omega^{(m,\overline{m})}$ вида

$$\Omega^{(m,\widetilde{m})}_{\mu,\overline{\mu}}[\eta] = \mathrm{d}^{2m}\lambda\, \mathrm{d}^{2\overline{m}}\widetilde{\lambda}\, \mathrm{d}^{2\overline{m}}\big(y + x\widetilde{\lambda}\big)\, \mathrm{d}^{2m}\big(\widetilde{y} + x\lambda\big)\, \eta\, \chi_{\mu,\widetilde{\mu}}, \quad (152)$$

где $\eta = \eta\big(\lambda_{\mathsf{i}}, y_{\bar{\mathsf{i}}}; \widetilde{y}_{\mathsf{j}}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}}\big|x\big)$ – некоторое решение (143). Заметим, что т.к. (143) – УЧП первого порядка, произведение двух решений η и $\chi_{\mu,\widetilde{\mu}}$ снова является решением. Важно, что замкнутые on-shell дифференциальные формы (152) имеют огромную свободу построения ввиду функционального параметри η, которые возможно зависит и от параметров плоской волны μ_{Ia}, $\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}$ (146). С другой стороны, для соблюдения трансляционной инвариантности необходимо потребовать, чтобы параметр η не зависел от x. Это достигается для η, зависящих только от $\lambda_{\mathsf{i}a}$, $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}$ и $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}$ (145)

$$\eta = \eta(\lambda, \widetilde{\lambda}, \rho)\,. \tag{153}$$

Интегрирование (152) по $4\mathbf{r}$-мерной поверхности $\mathbf{S} \subset \mathbf{Cor}_2^{(m,\overline{m})}$ приводит к сохраняющемуся заряду

$$\mathcal{Q}^{(m,\overline{m})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\,[\eta] := \int_{\mathbf{S}} \Omega^{(m,\overline{m})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\,[\eta]\,, \tag{154}$$

который не зависит от локальных деформаций поверхности $\mathbf{S}$. Нашей целью состоит выразить многочастичные амплитуды в форме зарядов .

3.3 Амплитуды MHV

3.4 Трёхчастичные амплитуды

Как было указано в разделе **??**, n-частичные древесные амплитуды даются формулой Парке-Тейлора (9). Нашей целью будет воспроизвести (10) в форме заряда (3.2). Для 3-частичной амплитуды с глюонами 1 и 2 несущими отрицательную спиральность выражение (10) даёт

$$\mathcal{A}^{(12,3)}_{\mu,\widetilde{\mu}} = \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^3}{\langle \mu_2 \mu_3 \rangle \langle \mu_3 \mu_1 \rangle}\, \delta^{(4)}\Big(\sum_{I=1}^{3} \mu_{Ia} \widetilde{\mu}_{I\dot{a}} \Big). \tag{155}$$

Для того, чтобы представить это выражение в форме (3.2) выберем $\mathbf{r} = 3$, $m = 2$ и $\overline{m} = 1$, а также $\eta = \eta^{(12,\bar{3})} := \prod_{\mathsf{i}=1,2,\bar{\mathsf{j}}=\bar{3}} \operatorname{sign}\big(\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\big)$ где $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}$ определены в (145). Произведём интегрирование по поверхности $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{Cor}_2^{(2,1)}$ такой, что $x = 0$, воспользовавшись при этом выражениями (146) и (152):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(2,1)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\bar{3})}\right] = \int \mathrm{d}^4\lambda\, \mathrm{d}^2\widetilde{\lambda}\, \mathrm{d}^2 y\, \mathrm{d}^4\widetilde{y}\, \exp\big(i\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}\widetilde{y}_{\mathsf{i}} + i\mu_{\bar{\mathsf{j}}} y_{\bar{\mathsf{j}}} \big) \\ \delta^{(2)}\big(\lambda_1 - \mu_1\big)\, \delta^{(2)}\big(\lambda_2 - \mu_2\big)\, \delta^{(2)}\big(\widetilde{\lambda}_{\bar{3}} - \widetilde{\mu}_{\bar{3}}\big) \operatorname{sign}\big(\rho_{1\bar{3}}\big) \operatorname{sign}\big(\rho_{2\bar{3}}\big)\,. \end{aligned} \tag{156}$$

Интегрирование дельта-функций приводит к

$$\mathcal{Q}^{(2,1)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\bar{3})}\right] = \int \mathrm{d}^2 y\, \mathrm{d}^4\widetilde{y}\, \exp\big(i\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}\widetilde{y}_{\mathsf{i}} + i\mu_{\bar{\mathsf{j}}} y_{\bar{\mathsf{j}}} \big) \operatorname{sign}\big(\mu_1 y_{\bar{3}} - \widetilde{\mu}_{\bar{3}}\widetilde{y}_1\big) \operatorname{sign}\big(\mu_2 y_{\bar{3}} - \widetilde{\mu}_{\bar{3}}\widetilde{y}_2\big). \tag{157}$$

Сделаем следующую замену пееменных: рассмотрим выражение (145)

$$\mu_{\mathsf{i}\,a} y^a_{\bar{\mathsf{j}}} - \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\,\dot a} \widetilde{y}^{\dot a}_{\mathsf{i}} = \rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \tag{158}$$

в качестве системы линейных уравнений, позволяющих выразить переменные $y^a_{\bar 3}$ и $\widetilde{y}^{\dot a}_{1,2}$ через $\rho_{1\bar 3}$, $\rho_{2\bar 3}$, а также параметры $\widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{i}}$ as follows **Vipisal yavno parametrizaciyu:**

$$y^a_{\bar{\mathsf{j}}} = \frac{\varepsilon_{\mathsf{ik}} \varepsilon^{ac} \mu_{\mathsf{k}c}}{\langle \mu_1\, \mu_2 \rangle} \rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} + \frac{\varepsilon_{\mathsf{ik}} \varepsilon^{ac} \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\dot a}}{\langle \mu_1\, \mu_2 \rangle} \widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{k}}, \quad \widetilde{y}^{\dot a}_{\mathsf{i}} = \widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{i}}, \tag{159}$$

where $\varepsilon_{\mathsf{ik}} = -\varepsilon_{\mathsf{ki}}$ and $\varepsilon_{12} = 1$. Сдлеланное позволяет переписать $\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}} \widetilde{y}_{\mathsf{i}} + \mu_{\bar{\mathsf{j}}} y_{\bar{\mathsf{j}}}$ в экспоненте (157) в форме

$$\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}} \widetilde{y}_{\mathsf{i}} + \mu_{\bar{\mathsf{j}}} y_{\bar{\mathsf{j}}} = \rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \frac{\langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} + \widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{i}} \left(\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot a} + \frac{\langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} \cdot \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\dot a} \right). \tag{160}$$

Прямым вычислением получается якобиан

$$\mathrm{d}^2 y\, \mathrm{d}^4 \widetilde{y} = \frac{1}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} \mathrm{d}^2 \rho\, \mathrm{d}^4 \widetilde{\xi}. \tag{161}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}^{(2,1)}_{\mu,\widetilde{\mu}} \left[\eta^{(12,\bar 3)} \right] = \\
&\frac{1}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} \int \mathrm{d}^2 \rho\, \mathrm{d}^4 \widetilde{\xi} \exp \left[i\, \rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \frac{\langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} \right] \exp \left[i\, \widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{i}} \left(\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot a} + \frac{\langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle}{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle} \cdot \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\dot a} \right) \right] \cdot \\
&\prod_{\mathsf{i},\bar{\mathsf{j}}} \operatorname{sign} \left(\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \right) = \\
&= \langle \mu_1 \mu_2 \rangle^5 \int \mathrm{d}^2 \rho\, \mathrm{d}^4 \widetilde{\xi} \exp \left[i\, \rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle \right] \exp \left[i\, \widetilde{\xi}^{\dot a}_{\mathsf{i}} F_{\mathsf{i}\dot a} \right] \cdot \\
&\prod_{\mathsf{i},\bar{\mathsf{j}}} \operatorname{sign} \left(\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} \right) \propto \frac{\langle \mu_1 \mu_2 \rangle^5}{\langle \mu_2 \mu_3 \rangle \langle \mu_3 \mu_1 \rangle} \delta^{(4)} (F),
\end{aligned} \tag{162}$$

где

$$F_{\mathsf{i}\dot a} = \langle \mu_1 \mu_2 \rangle\, \widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot a} + \langle \mu_{\bar{\mathsf{j}}}\, \varepsilon_{\mathsf{ik}} \mu_{\mathsf{k}} \rangle\, \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\dot a}. \tag{163}$$

Интегрирование по переменным ρ в (162) выполнено с использованием известной формулы [66]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \operatorname{sign}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2i}{k}. \tag{164}$$

Множитель $\delta^{(4)}(F)$ в (162) накладывает условие сохранения импульса $\delta^{(4)} \left(\sum_I \mu_{Ia} \widetilde{\mu}\right.$
Действительно, обозначая $P_{a\dot a} = \mu_{\mathsf{i}a} \widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot a} + \mu_{\bar{\mathsf{i}}a} \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{i}}\dot a}$, получаем

$$\varepsilon^{ab} \mu_{\mathsf{i}a} P_{b\dot a} = \varepsilon_{\mathsf{ij}} F_{\mathsf{j}\dot a}, \tag{165}$$

что влечёт $\delta^4(F) = \langle\mu_1\mu_2\rangle^{-2}\,\delta^4(P)$. Окончательный результат

$$\mathcal{Q}^{(2,1)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\overline{3})}\right] \propto \frac{\langle\mu_1\mu_2\rangle^3}{\langle\mu_2\mu_3\rangle\langle\mu_3\mu_1\rangle}\,\delta^{(4)}\big(\sum_I \mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\big) \tag{166}$$

воспроизводит (155) с точностью до множителя

$$\mathcal{Q}^{(2,1)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\overline{3})}\right] \propto \mathcal{A}^{(12,3)}_{\mu,\widetilde{\mu}}. \tag{167}$$

3.5 n-частичная амплитуда MHV

В случае $\mathbf{r} = n$, при $m = 2$ и $\overline{m} = n-2$, выражение (3.2) для $\eta = \eta^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})} := \prod_{\mathsf{i}=1,2,\bar{\mathsf{j}}=\overline{3}\ldots\overline{n}}\operatorname{sign}\big(\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\big)$ приводит к

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}\right] = \int \mathrm{d}^4\lambda\,\mathrm{d}^{2(n-2)}\widetilde{\lambda}\,\mathrm{d}^{2(n-2)}y\,\mathrm{d}^4\widetilde{y}\,\exp\left(i\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}\widetilde{y}_{\mathsf{i}} + i\mu_{\bar{\mathsf{j}}}y_{\bar{\mathsf{j}}}\right)\\ \delta^{(4)}\big(\lambda-\mu\big)\,\delta^{(2(n-2))}\big(\widetilde{\lambda}-\widetilde{\mu}\big)\prod_{\mathsf{i},\bar{\mathsf{j}}}\operatorname{sign}\big(\lambda_{\mathsf{i}a}y^a_{\bar{\mathsf{j}}} - \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}\big) =\\ = \int \mathrm{d}^{2(n-2)}y\,\mathrm{d}^4\widetilde{y}\,\exp\left(i\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}\widetilde{y}_{\mathsf{i}} + i\mu_{\bar{\mathsf{j}}}y_{\bar{\mathsf{j}}}\right)\prod_{\mathsf{i},\bar{\mathsf{j}}}\operatorname{sign}\left(\mu_{\mathsf{i}}y_{\bar{\mathsf{j}}} - \widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}}\widetilde{y}_{\mathsf{i}}\right).\end{aligned} \tag{168}$$

По аналогии со случаем трёхчастичной амплитуды, рассмотренным ранее, используем замену переменных от $y^a_{\bar{\mathsf{i}}}$ ($2(n-2)$ переменных) и $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}$ (4 переменные) к $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}$ (158) ($2(n-2)$ переменных) и $\widetilde{\xi}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}$ (4 переменные), получающимся из уравнений (158). Как и ранее, это даёт параметризацию (159) и меру интегрирования в виде

$$\mathrm{d}^{2(n-2)}y\,\mathrm{d}^4\widetilde{y} = \frac{1}{\langle\mu_1\mu_2\rangle^{n-2}}\,\mathrm{d}^{2(n-2)}\rho\,\mathrm{d}^4\widetilde{\xi}. \tag{169}$$

Окончательный результат имеет вид

$$\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}\right] \propto \frac{\langle\mu_1\mu_2\rangle^n}{\prod_{\mathsf{i}=1,2,\bar{\mathsf{j}}=\overline{3}\ldots\overline{n}}\langle\mu_{\mathsf{i}}\mu_{\bar{\mathsf{j}}}\rangle}\,\delta^{(4)}\big(\sum_I \mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\big). \tag{170}$$

Для $n = 4$ полученное выражение воспроизводит 4-частичную амплитуду с фиксированным пупорядочением глюонов, а именно $1\overline{3}2\overline{4}$, что соответствует делителю $\langle\mu_1\mu_{\overline{3}}\rangle\langle\mu_{\overline{3}}\mu_2\rangle\langle\mu_2\mu_{\overline{4}}\rangle\langle\mu_{\overline{4}}\mu_1\rangle$ в (170):

$$\mathcal{Q}^{(2,2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}\right] \propto \frac{\langle\mu_1\mu_2\rangle^4}{\langle\mu_1\mu_{\overline{3}}\rangle\langle\mu_{\overline{3}}\mu_2\rangle\langle\mu_2\mu_{\overline{4}}\rangle\langle\mu_{\overline{4}}\mu_1\rangle}\,\delta^{(4)}\big(\sum_I \mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\big). \tag{171}$$

И хотя выражение (170) не совпадает с n-частичной амплитудой MHV для $n > 4$ (см. (10)), тем не менее имеется свобода в выборе параметра η в (3.2) таким образом, что рациональная функция степени 0

$$\eta_\mu^{(\mathbf{1})} = \frac{\langle\lambda_1\,\mu_{\overline{3}}\rangle...\langle\lambda_1\,\mu_{\overline{n}}\rangle\cdot\langle\lambda_2\,\mu_{\overline{3}}\rangle...\langle\lambda_2\,\mu_{\overline{n}}\rangle}{\langle\lambda_1\,\lambda_2\rangle^{n-3}\langle\lambda_2\,\mu_{\overline{3}}\rangle\langle\mu_{\overline{4}}\,\mu_{\overline{5}}\rangle...\langle\mu_{\overline{n-1}}\,\mu_{\overline{n}}\rangle\langle\mu_{\overline{n}}\,\lambda_1\rangle} \tag{172}$$

с фиксированными спинорами $\mu_{\overline{3}...\overline{n},a}$ решает уравнение (143) (см. (144)) и приводит с точностью до числового множителя к

$$\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta_\mu^{(\mathbf{1})}\,\eta^{(12,\overline{3}...\overline{n})}\right] \propto \mathcal{A}^{(12,3...n)}_{\mu,\widetilde{\mu}}. \tag{173}$$

Таким образом, мы воспроизвели n-частичную асплитуду MHV для упорядочения глюонов $12\overline{3}...\overline{n}$.

Аналогичным образом возможно воспроизвести амплитуду с любым упорядочением глюонов $\sigma(1)...\sigma(n)$, параметризованным элементом $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, в виде заряда $\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta_\mu^{(\sigma)}\,\eta^{(12,\overline{3}...\overline{n})}\right]$ посредством выбора параметра

$$\eta_\mu^{(\sigma)} = \frac{\langle\lambda_1\,\mu_{\overline{3}}\rangle...\langle\lambda_1\,\mu_{\overline{n}}\rangle\cdot\langle\lambda_2\,\mu_{\overline{3}}\rangle...\langle\lambda_2\,\mu_{\overline{n}}\rangle}{\langle\lambda_1\,\lambda_2\rangle^{n-4}\langle\nu_{\sigma(1)}\,\nu_{\sigma(2)}\rangle\langle\nu_{\sigma(2)}\,\nu_{\sigma(3)}\rangle...\langle\nu_{\sigma(n)}\,\nu_{\sigma(1)}\rangle}\Bigg|_{\nu_{1,2}\to\lambda_{1,2},\,\nu_{3...n}\to\mu_{\overline{3}...\overline{n}}}. \tag{174}$$

Следует отметить, что за исключением случаев $n = 3$ и 4 для упорядочения $1\overline{3}2\overline{4}$, выражения (172) и (174) содержат импульсные переменные $\lambda_{1,2}$ в знаменателе и следовательно (170) приводится к форме n-частичной амплитуды MHV с использованием нелокального параметра η.

3.6 Трёхточечная амплитуда MHV для высших спинов

Рассмотрим MHV-подобный процесс рассеяния трёх полей высших спинов со спиральностями $-s_1 < 0$, $-s_2 < 0$ и $s_3 > 0$ такими, что $s_1+s_2-s_3 > 0$ [67, 68]. Отметим, что последнее условие означает, что спины частиц удовлетворяют неравенству треугольника $s_3 < s_1 + s_2$, которое играет центральную рольв контексте локальности взаимодействий полей ВС начиная с работы [4] (см. [61, 69]). Амплитуды рассеяния имеют вид[2] [67, 73, 68]

$$\mathcal{A}^{(1_{s_1}\,2_{s_2},3_{s_3})}_{\mu,\widetilde{\mu}} = \langle\mu_1\mu_2\rangle^{(s_1+s_2+s_3)}\langle\mu_2\mu_3\rangle^{(s_2-s_1-s_3)}\langle\mu_3\mu_1\rangle^{(s_1-s_2-s_3)}\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{I=1}^{3}\mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}\Big). \tag{175}$$

Чтобы воспроизвести их, рассмотрим (156) с модифицированным параметром

$$\eta^{(1_{s_1}\,2_{s_2},\overline{3}_{s_3})} = \langle\lambda_1\,\lambda_2\rangle^{\sum_{I=1}^{3}(s_I-1)}\,\rho_{1\overline{3}}^{(s_1-1)+(s_3-1)-(s_2-1)}\,\rho_{2\overline{3}}^{(s_2-1)+(s_3-1)-(s_1-1)}\,\mathrm{sign}\rho_{1\overline{3}}\,\mathrm{sign}\rho_{2\overline{3}}, \tag{176}$$

[2]Построение вершин взаимодействия для полей ВС в рамках формализма светового конуса было предложени в [70]. Задача о классификации всех кубических вершин в плоском 3 + 1-мернос плоском пространстве была решена в [71] и обобщена на произвольные размерности D в [72].

который сводится к $\eta^{(12,\bar{3})}$ в (156) для $s_{1,2,3} = 1$. Для того чтобы произвести интегрирование (3.2) (см. (156) и (176))

$$\mathcal{Q}_{\mu,\widetilde{\mu}}^{(1_{s_1}\,2_{s_2},\bar{3}_{s_3})}\left[\eta^{(1_{s_1}\,2_{s_2},\bar{3}_{s_3})}\right] = \int \mathrm{d}^4\lambda\,\mathrm{d}^2\widetilde{\lambda}\,\mathrm{d}^2 y\,\mathrm{d}^4\widetilde{y}\,\exp\left(i\widetilde{\mu}_{\mathrm{i}}\widetilde{y}_{\mathrm{i}} + i\mu_{\bar{3}}y_{\bar{3}}\right)$$
$$\eta^{(1_{s_1}\,2_{s_2},\bar{3}_{s_3})}\,\delta^4\big(\lambda-\mu\big)\,\delta^2\big(\widetilde{\lambda}-\widetilde{\mu}\big), \quad (177)$$

воспользуемсяwe следующим выражением, получающимся взятием k-й производной от (164) (см. [66]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\,\mathrm{sign}x\,e^{ikx}\mathrm{d}x = \frac{2i^{n+1}\,n!}{k^{n+1}},\ n = 0,1,2,\ldots. \quad (178)$$

Результат вычислений устанавливает эквивалентность между (177) и (175) с точностью до множителя

$$\mathcal{Q}_{\mu,\widetilde{\mu}}^{(1_{s_1}2_{s_2},\bar{3}_{s_3})}\left[\eta^{(1_{s_1}\,2_{s_2},\bar{3}_{s_3})}\right] \propto \mathcal{A}_{\mu,\widetilde{\mu}}^{(1_{s_1}2_{s_2},3_{s_3})}. \quad (179)$$

Следует отметить, что спины взаимодействующих частиц оказываются связанными со степенями переменных $\rho_{\mathrm{i}\bar{\mathrm{j}}}$ в параметре η (176). Это находится в согласии с идеей, что конкретный выбор функции η в (152) делается на основании нелинейной динамики рассмтариваемой теории. С другой стороны, описанный способ кодирования спина отличается от привычной ситуации в теории ВС, когда спин частицы описывается в терминах степеней однородности по переменным y и $\widetilde{y}$ [62]: при вычислении заряда (168) по последним производится интегрирование. Тем не менее, данная особенность позволяет применять рассмотренный формализм к теориям, не содержащим поля высших спинов, как эо явно продемонстрировано для процессов MHV в теориях Янга-Миллся (см. (10), (167), (173)). Но даже в таких случаях то, что остаётся со стороны теории ВС – это наличие бесконечно-мерной алгебры, действующей на пространстве амплитуд, а именно – многочастичного расширения алгебры высших спинов [58] (которая также является алгеброй Хопфа). Данный факт дополнительно свидетельствует в пользу применения техники теории ВС к вычислению амплитуд рассеяния, так как известно, что теории полей низших спинов могут, тем не менее, проявлять высокие симметрии, как это происходит с планарной теорией $\mathcal{N} = 4$ супер-Янга-Миллса[50].

3.7 Интегрирование по пространству-времени

Рассмотрим теперь интегрирование формы (152) по поверхности $\mathbf{S}_2$, содержащей пространство-время и продемонстрируем, что полученный таким образом результат совпадает с таковым при интегрировании по $\mathbf{S}_1$ при $x = 0$. Чтобы сделать это для n-частичной амплитуды (см. раздел 3.5), выберем

$2(n-2)$ переменных дополнительно к 4 переменным $x^{a\dot{a}}$ для того чтобы построить pullback от $2n$ переменн $y^a_{\bar{\mathsf{j}}} + x^{a\dot{a}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}$, $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}\lambda_{\mathsf{i}a}$ (*cf.* (144) и (147)). Это можно сделать рассмотрев уравнения (145), позволяющим для фиксированных $\lambda_{\mathsf{i}a}$ и $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\dot{a}}$ выразить $2n$ переменных $y, \widetilde{y}$ в терминах of $2(n-2)$ переменных $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}$ и 4 переменные $\widetilde{\xi}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}$, параметризующие решения однородного уравненияпри $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}} = 0$ (*cf.* (159)). Такая замена переменных невырождена для любых $\lambda_{\mathsf{i}a}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\dot{a}}$ за исключением множества нулевой меры $\det \lambda_{\mathsf{i}a} = 0$.

Заметим, что сдвиг

$$y^a_{\bar{\mathsf{i}}} \to y^a_{\bar{\mathsf{i}}} + x^{a\dot{a}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{i}}\dot{a}}, \quad \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} \to \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}\lambda_{\mathsf{i}\dot{a}} \tag{180}$$

не меняет $\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}$ (145). Как следствие, интегрирование по переменным x эквивалентно интегрированию по переменным $\widetilde{\xi}$ (см. (159) и(169)) при следующей репараметризации

$$\widetilde{\xi}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} = x^{a\dot{a}}\lambda_{\mathsf{i}a} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}^4\widetilde{\xi} = \langle\lambda_1\lambda_2\rangle^2\,\mathrm{d}^4x. \tag{181}$$

Такая подстановка приводит (168) к виду

$$\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(12,\bar{3}\ldots\bar{n})}\right] = \int \mathrm{d}^4\lambda\,\mathrm{d}^{2(n-2)}\widetilde{\lambda}\,\mathrm{d}^{2(n-2)}\rho\,\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{\langle\lambda_1\lambda_2\rangle^{n-4}}\,\exp\left(i\sum_{I=1}^{n}\mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot{a}}x^{a\dot{a}}\right)$$
$$\exp\left(i\,\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\,\frac{\langle\mu_{\bar{\mathsf{j}}}\,\varepsilon_{\mathsf{ik}}\mu_{\mathsf{k}}\rangle}{\langle\mu_1\mu_2\rangle}\right)\delta^4\big(\lambda-\mu\big)\,\delta^{2(n-2)}\big(\widetilde{\lambda}-\widetilde{\mu}\big)\prod_{\mathsf{i},\bar{\mathsf{j}}}\mathrm{sign}\left(\rho_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\right). \tag{182}$$

Интегрирование по переменным x приводит к дельта-функции закона сохранения энергии-импульса, в то время как интегрирование по ρ приводит к (170) аналогичным образом как и в разделе 3.5. Таким образом, мы заключаем, что интегрирование формы (152) по поверхности $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{Cor}^{(2,n-2)}_2$, параметризованной спинорными переменными, как и по поверхности $\mathbf{S}_2 \subset \mathbf{Cor}^{(2,n-2)}_2$ содержащей пространственно-временные переменные x, приводит к одному результату, хоть и стартуя с различных представленийдля $\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}$ (*cf.* (162) and (182)):

$$\mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\Big|_{\mathbf{S}_1} = \mathcal{Q}^{(2,n-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\Big|_{\mathbf{S}_2}. \tag{183}$$

Даже в рассмотренном простейшем случае взаимосвязь между различными представлениями неочевидна до тех пор, пока $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ не рассматриваются как поверхности в одном и том же пространстве $\mathbf{Cor}^{(2,n-2)}_2$, и что каждое отдельное представление полученоand посредством pullback замкнутой on-shell дифференциальной формы (147). Тот факт, что дифференциальная форма (147) замкнута, гарантирует, что результат интегрирования нечувствителен к деформациям поверхности интегрирования в рамках одного гомотопического класса.

Важно отметить, что условие $\mathbf{r} \geq 3$ является существенным для того, чтобы представление (182) и выражение (168) имели смысл. Это происходит потому, что дельта-функция закона сохранения энергии-импульса не имеет смысла при $\mathbf{r} = 2$, т.е. для закона сохранения вида $\delta^{(4)}(p_1 + p_2)$где оба импульа p_1 и p_2 – светоподобны. Это находится в согласии с тем фактом [28], что обычные билинейные заряды ВС для $\mathbf{r} = 2$ представимы в виде интегралов по 3-мерным пространственно-подобным поверхностям, в то время как четвёртое измерение берётся компактным и параметризует спин. Для старших рангов $\mathbf{r} \geq 3$ оказывается возможным производить интегрирование по всему четырёхмерному x-пространнству и получать при этом выражения, имеющие смысл, как $\delta^{(4)}\left(\sum_{I=1}^{\mathbf{r}} p_I\right)$ для закона сохранения суммы $\mathbf{r}$ светоподобных импульсов (см. (182)).

3.8 Форм-факторы для напряжённостей полей

В данной секции будет объяснено, почему амплитуды рассеяния, которые формулируются в терминах калибровочных потенциалов (136), возможн воспроизвести в терминах сохраняющихся зарядов (3.2) для калибровочно-инвариантных напряжённостей (133). Однако, прежде чем вдаваться в подробности, опишем главную идею. Как было отмечено касательно уравнений (138), напряжённость поля спина s получается взятием $\lfloor s \rfloor$ производных от калибровочного поля спина s Это означает, что переход от напряжённостей к потенциалам осуществляется посредством нелокального преобразования. В рамках рассматриваемого подхода пространственно-временные нелокальности выражаются в виде дробно-рациональной зависимости параметров η (153) от переменных $\lambda_{\mathsf{i}a}$ и $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}$ ввиду уравнения (143). В результате, заряды высших спинов, соответствующие калибровочным потенциалам (136) связаны с таковыми для напряжённостей (133) вставкой в (3.2) дополнительного параметра (153), сожержащего отрицательные степени по переменным $\lambda_{\mathsf{i}a}, \widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}$. Технические подробности, подтверждающие вышеприведенные рассуждения, выглядят громоздко по причине явного выписывания спин-тензорной структуры полей высших спинов. Тем не менее, их структура прозрачна и мы приводим их для полноты излоежния.

По причине того, что уравнение (140) описывает калибровочно-инвариантные напряжённости (т.е. кривизны полей ВС) [62], сохраняющиеся заряды (3.2) естественным образом оисывают $\mathbf{r}$-частичные корреляционные функции (форм-факторы) нормально-упорядоченных операторов полей вида

$$\langle 0| : \widehat{C}_{a_1(n_1),\dot{a}_1(n'_1)}(p_1) \ldots \widehat{C}_{a_{\mathbf{r}}(n_{\mathbf{r}}),\dot{a}_{\mathbf{r}}(n'_{\mathbf{r}})}(p_{\mathbf{r}}) : \widehat{S}|0\rangle, \tag{184}$$

где $\widehat{S}$ – это S-матрица, $\widehat{C}_{a(n),\dot{a}(n')}(p)$ – симметрические спин-тензоры с n индексами a и n' индексами $\dot{a}$, представляющие on-shell производные (анти-)самодуальных компонент обобщённых тензоров Вейля для поля спина s

в импльсном представлении. Условие (анти-)самодуальности определяется условием $\operatorname{sign}(n'-n) = (+)-$. Как указано в разделе 3.1.1, обобщённые тензоры Вейля свящаны с калибровочными полями (136) посредством центральной on-mass-shell теоремы (137). Рассмотрим более подробно калибровочные поля (136) в виде плоских волн:

$$\mathrm{d}x^{a\dot{a}}\, W^{(-)}_{a(k),\dot{a}(l)}(x) \propto \theta(k-l)\ \mathrm{d}x^{a\dot{a}}\, \frac{\overbrace{\mu_a \ldots \mu_a}^{k}\ \overbrace{\widetilde{\rho}_{\dot{a}} \ldots \widetilde{\rho}_{\dot{a}}}^{l}}{\left[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\mu}\right]^{l}}\, e^{i\,\mu_a \widetilde{\mu}_{\dot{a}} x^{a\dot{a}}}, \tag{185}$$

где $\mu_a \widetilde{\mu}_{\dot{a}}$ – светоподобный импульс и $\widetilde{\rho}_{\dot{a}}$ – произвольный вспомогательный спинор такой, что $\left[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\mu}\right] := \widetilde{\rho}_{\dot{a}}\,\widetilde{\mu}^{\dot{a}} \neq 0$. В этом случае поля (185) удовлетворяют уравнениям (138) с обобщёнными тензорами Вейля вида

$$c^{(-)}_{a(n),\dot{a}(n')}(x) \propto \theta(n-n')\, \underbrace{\mu_a \ldots \mu_a}_{n}\ \underbrace{\widetilde{\mu}_{\dot{a}} \ldots \widetilde{\mu}_{\dot{a}}}_{n'}\, e^{i\,\mu_a \widetilde{\mu}_{\dot{a}} x^{a\dot{a}}}\,, \tag{186}$$

где $n - n' = 2s \geq 0$. Таким образом, калибровочные поля (185) соответствуют самодуальной (СД) проекции свободных полей ВС. Построение антисамодуальных (АСД) компонент $W^{(+)}$ для (185) и $C^{(+)}$ для (186) производится аналогично.

При квантовании тензоры отрицательной поляризации, отвечающие самодуальной проекции калибровочных потенциалов $W^{(-)}$ (185) и обобщённых тензоров Вейля $C^{(-)}$ (186), также как и их АСД аналоги $W^{(+)}$ и $C^{(+)}$, оснащаются операторами рождения и уничтожения $\widehat{a}^{\dagger}_{\pm s}(\vec{p})\,, \widehat{a}_{\pm s}(\vec{p})$ квантов поля данного импульса, спина и поляризации. Действие справа нормально-упорядоченных произведений полевых операторов производит *out*-состояние, помноженное на тензоры поляризации:

$$\begin{aligned}&\langle 0| : \widehat{w}^{(\sigma_1)}_{a_1(k_1),\dot{a}_1(l_1)}(p_1) \ldots \widehat{w}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}(k_{\mathbf{r}}),\dot{a}_{\mathbf{r}}(l_{\mathbf{r}})}(p_{\mathbf{r}}) : \propto \\ &\frac{\overbrace{\xi^{(\sigma_1)}_{1\,a_1} \ldots \xi^{(\sigma_1)}_{1\,a_1}}^{k_1}\ \overbrace{\widetilde{\xi}^{(\sigma_1)}_{1\,\dot{a}_1} \ldots \widetilde{\xi}^{(\sigma_1)}_{1\,\dot{a}_1}}^{l_1}}{\left(\xi^{(\sigma_1)}_1, \widetilde{\xi}^{(\sigma_1)}_1\right)^{\min(k_1,l_1)}} \ldots \frac{\overbrace{\xi^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}\,a_{\mathbf{r}}} \ldots \xi^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}\,a_{\mathbf{r}}}}^{k_{\mathbf{r}}}\ \overbrace{\widetilde{\xi}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}\,\dot{a}_{\mathbf{r}}} \ldots \widetilde{\xi}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}\,\dot{a}_{\mathbf{r}}}}^{l_{\mathbf{r}}}}{\left(\xi^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}}\, \widetilde{\xi}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}}\right)^{\min(k_{\mathbf{r}},l_{\mathbf{r}})}} \left\langle p^{(\sigma_1)}_1 \ldots p^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}} \right|,\end{aligned} \tag{187}$$

где $\xi^{(\sigma)}_a = \operatorname{sign}(\sigma)\ \rho_a + \operatorname{sign}(-\sigma)\ \mu_a$ and $\widetilde{\xi}^{(\sigma)}_{\dot{a}} = \operatorname{sign}(\sigma)\ \widetilde{\mu}_{\dot{a}} + \operatorname{sign}(-\sigma)\ \widetilde{\rho}_{\dot{a}}$, для $p_{a\dot{a}} = \mu_a \widetilde{\mu}_{\dot{a}}$, а также вспомогательные спиноры ρ_a, $\widetilde{\rho}_{\dot{a}}$ и скобка $\left(\xi^{(\sigma)}\, \widetilde{\xi}^{(\sigma)}\right) := \operatorname{sign}(\sigma)\,\langle \rho\, \mu\rangle + \operatorname{sign}(-\sigma)\left[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\mu}\right]$ (см. (185)). Аналогичное выражение имеет место для обобщённых тензоров Вейля (186):

$$\begin{aligned}&\langle 0| : \widehat{C}^{(\sigma_1)}_{a_1(k_1),\dot{a}_1(l_1)}(p_1) \ldots \widehat{C}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}(k_{\mathbf{r}}),\dot{a}_{\mathbf{r}}(l_{\mathbf{r}})}(p_{\mathbf{r}}) : \propto \\ &\underbrace{\zeta^{(\sigma_1)}_{a_1} \ldots \zeta^{(\sigma_1)}_{a_1}}_{k_1}\ \underbrace{\widetilde{\zeta}^{(\sigma_1)}_{\dot{a}_1} \ldots \widetilde{\zeta}^{(\sigma_1)}_{\dot{a}_1}}_{l_1} \ldots \underbrace{\zeta^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}} \ldots \zeta^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}}}_{k_{\mathbf{r}}}\ \underbrace{\widetilde{\zeta}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\dot{a}_{\mathbf{r}}} \ldots \widetilde{\zeta}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\dot{a}_{\mathbf{r}}}}_{l_{\mathbf{r}}} \left\langle p^{(\sigma_1)}_1 \ldots p^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\mathbf{r}} \right|,\end{aligned} \tag{188}$$

где поляризации $\zeta_a^{(\sigma)} = \mathrm{sign}\,(-\sigma)\ \mu_a$ и $\widetilde{\zeta}_{\dot a}^{(\sigma)} = \mathrm{sign}\,(\sigma)\ \widetilde{\mu}_{\dot a}$ (см. (186)). Таким образом, форм-факторы (184) связаны с амплитудами посредством оснащения амплитуд тензорами поляризации:

$$\begin{gathered}\langle 0|:\widehat{C}^{(\sigma_1)}_{a_1(k_1),\dot a_1(l_1)}\,(p_1)\ldots\widehat{C}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}(k_{\mathbf{r}}),\dot a_{\mathbf{r}}(l_{\mathbf{r}})}\,(p_{\mathbf{r}}):\ \widehat{S}\,|0\rangle\ \propto \\ \underbrace{\zeta^{(\sigma_1)}_{a_1}\ldots\zeta^{(\sigma_1)}_{a_1}}_{k_1}\underbrace{\widetilde{\zeta}^{(\sigma_1)}_{\dot a_1}\ldots\widetilde{\zeta}^{(\sigma_1)}_{\dot a_1}}_{l_1}\cdots\underbrace{\zeta^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}}\ldots\zeta^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{a_{\mathbf{r}}}}_{k_{\mathbf{r}}}\underbrace{\widetilde{\zeta}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\dot a_{\mathbf{r}}}\ldots\widetilde{\zeta}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}_{\dot a_{\mathbf{r}}}}_{l_{\mathbf{r}}}\big\langle p_1^{(\sigma_1)}\ldots p_{\mathbf{r}}^{(\sigma_{\mathbf{r}})}\big|\widehat{S}\big|0\big\rangle.\end{gathered}\tag{189}$$

К примеру, рассмотрим корреляторы напряжённостей поля спина 1. На древесном уровне форм-факторы выражаются при помощи $\mathbf{r}$-частичной амплитуды Парке-Тейлора

$$\begin{gathered}\langle 0|:\widehat{C}^{(-)}_{a_1 a_1}\,(p_1)\ \widehat{C}^{(-)}_{a_2 a_2}\,(p_2)\ \widehat{C}^{(+)}_{\dot a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3}}\,(p_3)\ldots\widehat{C}^{(+)}_{\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}}\,(p_{\mathbf{r}}):\ \widehat{S}\,|0\rangle_{\mathrm{tree}}\propto \\ \prod_{\mathsf{i}=1,2}\mu_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\mu_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\prod_{\bar{\mathsf{j}}=\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}\widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}\ \frac{\langle\mu_1\,\mu_2\rangle^4}{\langle\mu_1\,\mu_2\rangle\langle\mu_2\,\mu_{\bar 3}\rangle\ldots\langle\mu_{\bar{\mathbf{r}}}\,\mu_1\rangle}\delta^{(4)}\Big(\sum_{I=1,2,\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot a}\Big).\end{gathered}\tag{190}$$

Таким образом, крреляторы (190) могут быть получены в форме сохраняющихся зарядов ВС (173) посредством введения дополнительного параметра $\eta^{C}_{a_1(2),a_2(2),\dot a_{\bar 3}(2),\ldots,\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}(2)} = \prod_{\mathsf{i}=1,2}\lambda_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\lambda_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\prod_{\bar{\mathsf{j}}=\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}$ to (173),

$$\begin{gathered}\mathcal{Q}^{(2,\mathbf{r}-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{C}_{a_1(2)a_2(2)\dot a_{\bar 3}(2)\ldots\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}(2)}\,\eta^{(\mathbf{1})}\,\eta^{(12,\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}})}\right]\propto \\ \langle 0|:\widehat{C}^{(-)}_{a_1 a_1}\,(p_1)\ \widehat{C}^{(-)}_{a_2 a_2}\,(p_2)\ \widehat{C}^{(+)}_{\dot a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3}}\,(p_3)\ldots\widehat{C}^{(+)}_{\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}}\,(p_{\mathbf{r}}):\ \widehat{S}\,|0\rangle_{\mathrm{tree}}.\end{gathered}\tag{191}$$

Аналогичным образом получается выражение для электромагнитного потенциала (см. (185) при $k=l=1$):

$$\begin{gathered}\langle 0|:\widehat{w}^{(-)}_{a_1\dot a_1}\,(p_1)\ \widehat{w}^{(-)}_{a_2\dot a_2}\,(p_2)\ \widehat{w}^{(+)}_{a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3}}\,(p_3)\ldots\widehat{w}^{(+)}_{a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}}\,(p_{\mathbf{r}}):\ \widehat{S}\,|0\rangle_{\mathrm{tree}}\propto \\ \prod_{\mathsf{i}=1,2}\frac{\mu_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\widetilde{\rho}_{\mathsf{i},\dot a_{\mathsf{i}}}}{[\widetilde{\rho}_{\mathsf{i}}\,\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}]}\prod_{\bar{\mathsf{j}}=\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\frac{\widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}\rho_{\bar{\mathsf{j}},a_{\bar{\mathsf{j}}}}}{\langle\rho_{\bar{\mathsf{j}}}\,\mu_{\bar{\mathsf{j}}}\rangle}\ \frac{\langle\mu_1\,\mu_2\rangle^4}{\langle\mu_1\,\mu_2\rangle\langle\mu_2\,\mu_{\bar 3}\rangle\ldots\langle\mu_{\bar{\mathbf{r}}}\,\mu_1\rangle}\delta^{(4)}\Big(\sum_{I=1,2,\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\mu_{Ia}\widetilde{\mu}_{I\dot a}\Big).\end{gathered}\tag{192}$$

Выражение (192) может быть получено в виде сохраняющегося заряда (173) посредством вставки параметра $\eta^{w}_{a_1\dot a_1,a_2\dot a_2,a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3},\ldots,a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}} = \prod_{\mathsf{i}=1,2}\dfrac{\lambda_{\mathsf{i},a_{\mathsf{i}}}\widetilde{\rho}_{\mathsf{i},\dot a_{\mathsf{i}}}}{[\widetilde{\rho}_{\mathsf{i}}\,\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}}]}\prod_{\bar{\mathsf{j}}=\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}}}\dfrac{\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathsf{j}},\dot a_{\bar{\mathsf{j}}}}\rho_{\bar{\mathsf{j}},a_{\bar{\mathsf{j}}}}}{\langle\rho_{\bar{\mathsf{j}}}\,\mu_{\bar{\mathsf{j}}}\rangle}$:

$$\begin{gathered}\mathcal{Q}^{(2,\mathbf{r}-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{w}_{a_1\dot a_1,a_2\dot a_2,a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3},\ldots,a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}}\,\eta^{(\mathbf{1})}\,\eta^{(12,\bar 3\ldots\bar{\mathbf{r}})}\right]\propto \\ \langle 0|:\widehat{w}^{(-)}_{a_1\dot a_1}\,(p_1)\ \widehat{w}^{(-)}_{a_2\dot a_2}\,(p_2)\ \widehat{w}^{(+)}_{a_{\bar 3}\dot a_{\bar 3}}\,(p_3)\ldots\widehat{w}^{(+)}_{a_{\bar{\mathbf{r}}}\dot a_{\bar{\mathbf{r}}}}\,(p_{\mathbf{r}}):\ \widehat{S}\,|0\rangle_{\mathrm{tree}}.\end{gathered}\tag{193}$$

Из сказанного можно заключить, что форм-факторы как для калибровочно-инвариантных напряжённостей, так и для калибровочных полей можно представить в виде многочастичных сохраняющихся зарядов ВС (3.2). Действие калибровочной симметрии на потенциалы (136) на уровне сохраняющихся зарядов превращается в дейтвие на параметр симметрии η in (3.2) посредством сдвига вспомогательных спиноров $\rho_{\mathrm{i}a} \to \rho_{\mathrm{i}a} + \epsilon\mu_{\mathrm{i}a}$, $\widetilde{\rho}_{\bar{\mathrm{j}}\dot{a}} \to \widetilde{\rho}_{\bar{\mathrm{j}}\dot{a}} + \epsilon\widetilde{\mu}_{\bar{\mathrm{j}}\dot{a}}$.

Наконец, заряды (193) для напряжённостей связаны с таковыми для калибровочных полей (191) посредством нелокального преобразования. А именно, для фиксированного импульса $p_{a\dot{a}} = \mu_a\widetilde{\mu}_{\dot{a}}$ и вспомогательных спиноров ρ_a, $\widetilde{\rho}_{\dot{a}}$ введём параметры

$$\eta^{(-)}_{a\dot{a}}(\lambda) = \frac{\rho_a\widetilde{\rho}_{\dot{a}}}{\langle\lambda\,\rho\rangle\big[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\mu}\big]} \quad \text{and} \quad \eta^{(+)}_{a\dot{a}}(\widetilde{\lambda}) = \frac{\rho_a\widetilde{\rho}_{\dot{a}}}{\langle\mu\,\rho\rangle\big[\widetilde{\rho}\,\widetilde{\lambda}\big]}. \tag{194}$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}^{(2,\mathbf{r}-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{w}_{a_1\dot{a}_1,a_2\dot{a}_2,a_{\overline{3}}\dot{a}_{\overline{3}},\dots,a_{\overline{\mathbf{r}}}\dot{a}_{\overline{\mathbf{r}}}}\,\eta^{(\mathbf{1})}\,\eta^{(12,\overline{3}\dots\overline{\mathbf{r}})}\right]\propto\\ &\mathcal{Q}^{(2,\mathbf{r}-2)}_{\mu,\widetilde{\mu}}\left[\eta^{(-)}_{c_1\dot{a}_1}(\lambda_1)\eta^{(-)}_{c_2\dot{a}_2}(\lambda_2)\eta^{(+)}_{a_{\overline{3}}\dot{c}_{\overline{3}}}(\widetilde{\lambda}_{\overline{3}})\dots\eta^{(+)}_{a_{\overline{\mathbf{r}}}\dot{c}_{\overline{\mathbf{r}}}}(\widetilde{\lambda}_{\overline{\mathbf{r}}})\,\eta^{C}{}_{a_1}{}^{c_1}{}_{,a_2}{}^{c_2}{}_{,\dot{a}_{\overline{3}}}{}^{\dot{c}_{\overline{3}}}{}_{,\dots,a_{\overline{\mathbf{r}}}}{}^{\dot{c}_{\overline{\mathbf{r}}}}\,\eta^{(\mathbf{1})}\,\eta^{(12,\overline{3}\dots\overline{\mathbf{r}})}\right].\end{aligned} \tag{195}$$

Полученное соотношение обосновывает применение многочастичных сохраняющихся зарядов ВС (3.2), изначально построенных в терминах калибровочно-инвариантных 0-форм (133), к вычислению амплитуд рассеяния, формулируемых в терминах калибровочных полей (136). По той причине, что 0-формы связаны с калибровочными полями посредством пространственно-временных производных (см. (138)), обратный переход в сторону калибровочнх потенциалов достигается нелокальным (и калибровочно-зависимым) преобразованием. В соответствии с развёрнутым уравнением (143) пространственно-временные нелокальности получаются делением на спинорные переменные $\lambda_{\mathrm{i}a}$, $\widetilde{\lambda}_{\bar{\mathrm{j}}\dot{a}}$ (см. (194), (195)). Но так как амплитуды в любом случае – нелокальные объекты, такие преобразования допустимы в рассматриваемом контексте.

4 Обобщённое пространство Минковского

Уравнение ранга $\mathbf{r}$ (140) может быть обобщено посредством расширения диапазона значений спинорных индексов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}} + i\,\delta_{IJ}\frac{\partial^2}{\partial y^{\mathfrak{a}}_I\partial\widetilde{y}^{\dot{\mathfrak{a}}}_J}\right)\mathcal{C}^{\mathbf{r}}\left(y,\widetilde{y}|x\right) = 0, \tag{196}$$

где $I,J = 1\dots\mathbf{r}$ and $\mathfrak{a},\dot{\mathfrak{a}} = 1\dots K$, $K \geq 2$. Теперь координаты $x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}$ параметризуют т.н. *обобщённое пространство Минковского* $\mathcal{M}_K$ [33]. Известно, что уравнение (196) допускает физическую интерпреацию для некоторых значений $\mathbf{r}$ и K: для $\mathbf{r} = 1$, $K = 2,4,8$ оно описывает мультиплеты полей ВС в плоском пространстве в различном числе измерений, а для $\mathbf{r} = 2$, $K = 2$ оно описывает конформные сохраняющиеся токи в 4-мерном пространстве Миковского (см [33]). В случае $K = 2n$ координаты $x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}$ могут быть представлены в виде матрицы размера $2n \times 2n$, содержащей блоки 2×2 вида $x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}$, $a, \dot{a} = 1, 2$ и $\mathbb{i}, \mathbb{j} = 1 \ldots n$. С такой точки зрения, на уравнение (196) можно смотреть как на описывающее динамику n^2-локальных полей в $\mathcal{M}_2$, что приводит к рассмотрению полилокальных законов сохранения. Обыкновенное пространство Минковского $\mathcal{M}_2$ может быть рассмотрено как диагональное вложение в $\mathcal{M}_{2n}$ с координатами $x^{a\dot{a}}$ пространства $\mathcal{M}_2$ в виде $x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}} = \delta_{\mathbb{i}\mathbb{j}}\, x^{a\dot{a}}$.

Заряды полилокальных полей (196) ранга $\mathbf{r} = 1$ с $K = 2n$, $n \geq 3$, можно связать с n-частичными амплитудами MHV (10) следующим образом. Следуя построениям раздела 3.1, уравнение (196) можно преобразовать в УЧП первого порядка (см. (143))

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}} - \lambda_{\mathfrak{a}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}^{\dot{\mathfrak{a}}}} \right) g^{(1,0)}\big(\lambda, \widetilde{y} \big| x\big) = 0 \tag{197}$$

с характеристиками

$$\lambda_{\mathfrak{a}}, \quad \widetilde{y}^{\dot{\mathfrak{a}}} + x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}\, \lambda_{\mathfrak{a}}. \tag{198}$$

Пространство соответствия в этом случае – $\mathbf{Cor}_K^{(1,0)} = \mathcal{M}_K \times \mathbb{R}^{2K}$, параметризуется переменными $x^{\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{a}}}$, $\lambda_{\mathfrak{a}}$ и $\widetilde{y}^{\dot{\mathfrak{a}}}$, $\dim \mathbf{Cor}_K^{(1,0)} = K^2 + 2K$. Замкнутые on-shell дифференциальные формы степени $2K = 4n$ строятся по решению g уравнения (197) следующим образом (см. (147))

$$\Omega_K[g] = \mathrm{d}^{2n}\lambda\, \mathrm{d}^{2n}\big(\widetilde{y} + x\,\lambda\big)\, g\big(\lambda, \widetilde{y} \big| x\big). \tag{199}$$

Чтобы привести обозначения к виду, удобному для описания диагонального вложения $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_{2n}$, описанного выше, удобно рассмотреть характеристики (198) в виде

$$\lambda_{\mathbb{i}a}, \quad \widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathbb{i}} + x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}\, \lambda_{\mathbb{j}a}, \tag{200}$$

где $\mathbb{i}, \mathbb{j} = 1 \ldots n$ нумеруют одночастичные секторы относительно пространства $\mathcal{M}_2$ (по повторяющемуся индексу производится суммирование) с $a, \dot{a} = 1, 2$. Для того, чтобы получить амплитуду MHV (10) интегрированием форму (199) необходимо нарушить симметрию $\mathfrak{S}_n$, действующую на одночастичные переменные (200) перестановками. Чтобы сделать это, разобьём значения индекса $\mathbb{i} = 1 \ldots n$ наs 2 значения $\mathsf{i} = 1, 2$ и $n - 2$ значений $\bar{\mathsf{j}} = \overline{3} \ldots \overline{n}$ [3], и будем, таким образом, явно различать между переменными $\lambda_{\mathsf{i}a}$, $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}} + x^{a\dot{a}}_{\mathsf{i}\mathbb{j}} \lambda_{\mathbb{j}a}$ и $\lambda_{\bar{\mathsf{j}}a}$, $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}} + x^{a\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}\mathbb{i}} \lambda_{\mathbb{i}a}$. Для того чтобы получить n-частичную амплитуду MHV посредством pullback'а формы (199) на диагональное вложение $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_{2n}$, достаточно выбрать решение $g^{(1,0)} = g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}$, параметризованное волновыми

[3]Для того чтобы описать различные положения глюонов с отрицательной поляризацией, мМожно выбрать любые 2 значения из $1 \ldots n$ для индекса i и взять остальные $n - 2$ значений для $\bar{\mathsf{j}}$.

спинорами $\mu_{\mathbb{i}a}$, $\widetilde{\mu}_{\mathbb{i}\dot{a}}$ (199), следующим образом

$$g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\big(\lambda,\widetilde{y}\big|x\big)=\frac{\langle\lambda_1\,\lambda_2\rangle^4}{\langle\lambda_1\,\lambda_2\rangle\langle\lambda_2\,\lambda_{\overline{3}}\rangle\ldots\langle\lambda_{\overline{n}}\,\lambda_1\rangle}\,\delta^{(4)}\Big(\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot{a}}\big(\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{j}}+x^{a\dot{a}}_{\mathsf{j}\mathbb{i}}\lambda_{\mathbb{i}a}\big)\Big)\,\delta^{(2n)}\big(\lambda_{\mathbb{i}a}-\mu_{\mathbb{i}a}\big)$$
$$\delta^{(4)}\big(\lambda_{\mathsf{i}a}+\sigma_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\,\lambda_{\bar{\mathsf{j}}a}\big)\,\delta^{(2(n-2))}\left(\frac{\widetilde{\mu}_{\bar{\mathsf{j}}\dot{a}}-\sigma_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}\,\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot{a}}}{\big[\widetilde{\mu}_1\,\widetilde{\mu}_2\big]}\right),\quad(201)$$

где $\sigma_{\mathsf{i}\bar{\mathsf{j}}}=\widetilde{\mu}_{\mathsf{i}\dot{a}}\big(\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}}+x^{a\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}\mathbb{i}}\lambda_{\mathbb{i}a}\big)$ (напомним, что $\big[\widetilde{\mu}_1\,\widetilde{\mu}_2\big]=\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\widetilde{\mu}_{1\dot{a}}\widetilde{\mu}_{2\dot{b}}$ и $\langle\lambda_{\mathbb{i}}\,\lambda_{\mathbb{j}}\rangle=\varepsilon^{ab}\,\lambda_{\mathbb{i}a}\lambda_{\mathbb{j}b}$ где антисимметричный символ $\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}}=\varepsilon^{12}=1$). Вид решения (201) подобен конструкции интеграла по грассманиану, предложенной в [46]. Оно явным образом нарушает симметрию $\mathfrak{S}_n$. Наиболее простой способ проверить, что интегрирование формы (199) с решением (201) действительно воспроизводит n-частичную амплитуду MHV (10),

$$\int\Omega_{2n}\big[g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\big]\propto\mathcal{A}^{(12,3\ldots n)}_{\mu,\widetilde{\mu}},\tag{202}$$

состоит в выборе поверхности интегрирования $\mathbf{S}_1\subset\mathbf{Cor}^{(1,0)}_K$ при $x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}=0$. Такой же результат получается для диагонального вложения пространства Минковского $\mathcal{M}_2$ с координатами $x^{a\dot{a}}$ в обобщённое пространство Минковского $\mathcal{M}_{2n}$ with $x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}=x^{a\dot{a}}\delta_{\mathbb{i}\mathbb{j}}$. В этом случае интегрирование производится по поверхности $\mathbf{S}_2\subset\mathbf{Cor}^{(1,0)}_K$, параметризованной 4 переменными $x^{a\dot{a}}$ of $\mathcal{M}_2\subset\mathcal{M}_{2n}$, $2(n-2)$переменными $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\bar{\mathsf{j}}}$ и $2n$ переменными $\lambda_{\mathbb{i}a}$ при $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathsf{i}}=0$. Так как дифференциальная форма (199) замкнута при выполнении уравнения (197), интегрирование приводит в обоих случаях к одному и тому же ответу:

$$\int_{\mathbf{S}_1}\Omega_{2n}\big[g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\big]=\int_{\mathbf{S}_2}\Omega_{2n}\big[g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\big],\tag{203}$$

который в свою очередь совпадает с (10).

Другой любопытный выбор поерхности интегрирования $\mathbf{S}_3\subset\mathbf{Cor}^{(1,0)}_K$ состоит в выборе $\widetilde{y}^{\dot{a}}_{\mathbb{i}}=0$. Что же касается переменных $x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}$, рассмотрим диагональное вложение n копий пространства Минковского $\mathcal{M}_2$ в $\mathcal{M}_{2n}$, $\underbrace{\mathcal{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_2}_{n}$ $\mathcal{M}_{2n}$, определённое следующим образом

$$x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{i}}\equiv x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}}\quad\text{and}\quad x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}\mathbb{j}}=0\quad\text{for}\quad\mathbb{i}\neq\mathbb{j}.\tag{204}$$

В этом случае pullback дифференциальной формы (199) с решением (201) на вложение $\underbrace{\mathcal{M}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_2}_{n}\subset\mathcal{M}_{2n}$ даёт (204)

$$\Omega_K[g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}]\Big|_{\mathcal{M}_2^{\otimes n}}\propto\mathrm{d}^{2n}\lambda\wedge\left(\bigwedge_{\mathbb{i}=1}^{n}H^{ab}_{\mathbb{i}}\lambda_{\mathbb{i}a}\lambda_{\mathbb{i}b}\right)\,g^{(12,\overline{3}\ldots\overline{n})}_{\mu,\widetilde{\mu}}\big(\lambda,0\big|x_{\mathbb{i}}\big),\tag{205}$$

где $H^{ab}_{\mathbb{i}} = \mathrm{d}x^{a}_{\mathbb{i}\,\dot{c}} \wedge \mathrm{d}x^{b\dot{c}}_{\mathbb{i}}$ (без суммирования по $\mathbb{i}$). Отметим, что интегрирование $\delta\left(\lambda_{\mathbb{i}} - \mu_{\mathbb{i}}\right)$ в (205) по переменным λ выполяется элементарно, после чего остаётся лишь n-кратное интегрирование $H^{ab}_{\mathbb{i}}\,\mu_{\mathbb{i}a}\mu_{\mathbb{i}b}$, т.е. по двумерным плоскостям в $\mathcal{M}_2$, натянутым на пары, составленные из светоподобных импульсов $p_{\mathbb{i}\,a\dot{a}} = \mu_{\mathbb{i}a}\widetilde{\mu}_{\mathbb{i}\dot{a}}$ и векторов отрицательной поляризации $\epsilon^{(-)}_{\mathbb{i}\,a\dot{a}} = \dfrac{\mu_{\mathbb{i}a}\widetilde{\rho}_{\mathbb{i}\dot{a}}}{\left[\widetilde{\mu}\,\widetilde{\rho}\right]}$ (см. (185) и [44]). Для явного выполнения интегрирования (202) удобно использовать следующую параметризацию двумерных плоскостей

$$x^{a\dot{a}}_{\mathbb{i}} = \frac{\rho_{\mathbb{i}}{}^{a}\widetilde{z}^{\dot{a}}_{\mathbb{i}}}{\langle \mu_{\mathbb{i}}\,\rho_{\mathbb{i}}\rangle}, \tag{206}$$

где $\rho_{\mathbb{i}a}$ – постоянный спинор для каждого $\mathbb{i}$ (без суммирования по повторяющемуся индексу $\mathbb{i}$), а переменные $z^{\dot{a}}_{\mathbb{i}}$ параметризуют $\mathbb{i}$-ю двумерную самодуальную плоскость. Как можно было бы ожидать, результат интегрирования (202) по $\mathbf{S}_3$ совпадает с таковыми по $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ (см. (203)). Так как представление (205) содержит кратное интегрирование по пространственно-временным переменным, получающиеся заряды (202) нелокальны.

5 Заключение

В работе представлены исследования согласно задачам, подробно описанным в разделах 1.2 и 1.3.

По задаче раздела 1.2, был построен полный набор сохраняющихся зарядов, соответствующих высшим симметриям уравнения (12) при наложении периодических условий на вспомогательные переменные Y. Посредством квантования полей и, соответственно, найденных зарядов было построено действие алгебры зарядов (118) на квантованных полях. Наконец, была предъявлена бесконечномерная алгебра Ли (3), характеризующая симметрию системы при наложении периодических условий по переменным Y. Интересной особенностью рассмотренной периодической полевой конфигурации является действие алгебры высших спинов на классах гомотопичных циклов на торе $\mathcal{T}_M \times T^M$, что позволяет интегрирование по любому циклу сводить к интегрированию по спинорным переменным, параметризующим T^M. Ожидается, что разработанная техника позволит единообразно изучать чёрнодырные решения в теории высших спинов, как это описано в разделе 1.2.

По задаче раздела 1.3, было явно установлено соответствие между многочастичными зарядами полей ВС и амплитудами рассеяния в квантовой теории поля на примере амплитуд MHV в теории Янга-Миллса. Применение Разработанная техника позволяет установить, что на амплитудах любой квантовой теории поля действует бесконечномерная алгебра – многочастичное расширение алгебры высших спинов [58]. Ожидается, что данный факт с одной стороны поможет в дальнейшем систематическим образом исследовать высшие симметрии на пространстве амплитуд квантовых теорий поля, а с другой – исследовать дуальности между квантовыми теориями поля при отображении друг на друга пространств их амплитуд под действием преобразований из алгебры ВС.

Список литературы

[1] Mikhail A. Vasiliev. Higher spin gauge theories: Star product and AdS space. pages 533–610, 1999.

[2] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

[3] I. R. Klebanov and A. M. Polyakov. AdS dual of the critical O(N) vector model. *Phys. Lett.*, B550:213–219, 2002.

[4] Simone Giombi and Xi Yin. The Higher Spin/Vector Model Duality. *J. Phys.*, A46:214003, 2013.

[5] Mikhail A. Vasiliev. Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory. *J. Phys.*, A46:214013, 2013.

[6] Matthias R Gaberdiel and Rajesh Gopakumar. String Theory as a Higher Spin Theory. *JHEP*, 09:085, 2016.

[7] M. A. Vasiliev. From Coxeter Higher-Spin Theories to Strings and Tensor Models. *JHEP*, 08:051, 2018.

[8] Paul A. M. Dirac. Relativistic wave equations. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A155:447–459, 1936.

[9] L. P. S. Singh and C. R. Hagen. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case. *Phys. Rev.*, D9:898–909, 1974.

[10] Christian Fronsdal. Massless Fields with Integer Spin. *Phys. Rev.*, D18:3624, 1978.

[11] Mikhail A. Vasiliev. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions. *Phys. Lett.*, B285:225–234, 1992.

[12] Eugene P. Wigner. On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group. *Annals Math.*, 40:149–204, 1939. [Reprint: Nucl. Phys. Proc. Suppl.6,9(1989)].

[13] Y. O. Goncharov and M. A. Vasiliev. Higher-spin fields and charges in the periodic spinor space. *J. Phys.*, A50(27):275401, 2017.

[14] C. Fronsdal. MASSLESS PARTICLES, ORTHOSYMPLECTIC SYMMETRY AND ANOTHER TYPE OF KALUZA-KLEIN THEORY. *Math. Phys. Stud.*, 8:163–265, 1986.

[15] Igor A. Bandos, Jerzy Lukierski, and Dmitri P. Sorokin. Superparticle models with tensorial central charges. *Phys. Rev.*, D61:045002, 2000.

[16] Igor A. Bandos, Jerzy Lukierski, Christian Preitschopf, and Dmitri P. Sorokin. OSp supergroup manifolds, superparticles and supertwistors. *Phys. Rev.*, D61:065009, 2000.

[17] M. A. Vasiliev. Conformal higher spin symmetries of 4-d massless supermultiplets and osp(L,2M) invariant equations in generalized (super)space. *Phys. Rev.*, D66:066006, 2002.

[18] M. A. Vasiliev. Relativity, causality, locality, quantization and duality in the S(p)(2M) invariant generalized space-time. pages 826–872, 2001.

[19] M. A. Vasiliev. Higher spin conserved currents in Sp(2M) symmetric space-time. *Russ. Phys. J.*, 45:670–681, 2002. [Izv. Vuz. Fiz.2002N7,23(2002)].

[20] Igor A. Bandos. BPS preons and tensionless superp-brane in generalized superspace. *Phys. Lett.*, B558:197–204, 2003.

[21] V. E. Didenko and M. A. Vasiliev. Free field dynamics in the generalized AdS (super)space. *J. Math. Phys.*, 45:197–215, 2004.

[22] Mikhail Plyushchay, Dmitri Sorokin, and Mirian Tsulaia. Higher spins from tensorial charges and OSp(N|2n) symmetry. *JHEP*, 04:013, 2003.

[23] M. A. Vasiliev. Higher spin theories and Sp(2M) invariant space-time. In *3rd International Sakharov Conference on Physics Moscow, Russia, June 24-29, 2002*, 2003.

[24] Igor Bandos, Paolo Pasti, Dmitri Sorokin, and Mario Tonin. Superfield theories in tensorial superspaces and the dynamics of higher spin fields. *JHEP*, 11:023, 2004.

[25] I. Bandos, X. Bekaert, J. A. de Azcarraga, D. Sorokin, and M. Tsulaia. Dynamics of higher spin fields and tensorial space. *JHEP*, 05:031, 2005.

[26] Evgeny Ivanov and Jerzy Lukierski. Higher spins from nonlinear realizations of OSp(1|8). *Phys. Lett.*, B624:304–315, 2005.

[27] Evgeny Ivanov. Nonlinear Realizations in Tensorial Superspaces and Higher Spins. In *Proceedings, 22nd Max Born Symposium on Quantum, Super and Twistors: A Conference in Honor of Jerzy Lukierski on His 70th Birthday: Wroclaw, Poland, September 27-29, 2006*, 2007.

[28] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Higher Spin Fields in Siegel Space, Currents and Theta Functions. *JHEP*, 03:125, 2009.

[29] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Sp(8) invariant higher spin theory, twistors and geometric BRST formulation of unfolded field equations. *JHEP*, 12:021, 2009.

[30] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Operator algebra of free conformal currents via twistors. *Nucl. Phys.*, B876:871–917, 2013.

[31] Ioannis Florakis, Dmitri Sorokin, and Mirian Tsulaia. Higher Spins in Hyperspace. *JHEP*, 07:105, 2014.

[32] Evgeny Skvortsov, Dmitri Sorokin, and Mirian Tsulaia. Correlation Functions of Sp(2n) Invariant Higher-Spin Systems. *JHEP*, 07:128, 2016.

[33] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Higher rank conformal fields in the Sp(2M) symmetric generalized space-time. *Theor. Math. Phys.*, 145:1400–1424, 2005. [Teor. Mat. Fiz.145,35(2005)].

[34] O. A. Gelfond, E. D. Skvortsov, and M. A. Vasiliev. Higher spin conformal currents in Minkowski space. *Theor. Math. Phys.*, 154:294–302, 2008.

[35] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Conserved higher-spin charges in AdS_4. *Phys. Lett.*, B754:187–194, 2016.

[36] D. B. Fairlie, P. Fletcher, and Cosmas K. Zachos. Infinite Dimensional Algebras and a Trigonometric Basis for the Classical Lie Algebras. *J. Math. Phys.*, 31:1088, 1990.

[37] X. Bekaert, S. Cnockaert, Carlo Iazeolla, and M. A. Vasiliev. Nonlinear higher spin theories in various dimensions. In *Higher spin gauge theories: Proceedings, 1st Solvay Workshop: Brussels, Belgium, 12-14 May, 2004*, pages 132–197, 2004.

[38] D. Mumford.

[39] S. Kharchev and A. Zabrodin. Theta vocabulary II. Multidimensional case. *J. Geom. Phys.*, 104:112–120, 2016.

[40] Maximo Banados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black hole in three-dimensional space-time. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1849–1851, 1992.

[41] V. E. Didenko, A. S. Matveev, and M. A. Vasiliev. BTZ Black Hole as Solution of 3-D Higher Spin Gauge Theory. *Theor. Math. Phys.*, 153:1487–1510, 2007. [Teor. Mat. Fiz.153,158(2007)].

[42] S. J. Parke and T. R. Taylor. An Amplitude For N Gluon Scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2459, 1986.

[43] F. A. Berends and W. T. Giele. Recursive Calculations For Processes With N Gluons. *Nucl. Phys. B*, 306:759, 1988.

[44] Edward Witten. Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space. *Commun. Math. Phys.*, 252:189–258, 2004.

[45] Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, and Edward Witten. Direct proof of tree-level recursion relation in Yang-Mills theory. *Phys. Rev. Lett.*, 94:181602, 2005.

[46] Nima Arkani-Hamed, Freddy Cachazo, Clifford Cheung, and Jared Kaplan. The S-Matrix in Twistor Space. *JHEP*, 03:110, 2010.

[47] Nima Arkani-Hamed, Freddy Cachazo, Clifford Cheung, and Jared Kaplan. A Duality For The S Matrix. *JHEP*, 03:020, 2010.

[48] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, and E. Sokatchev. Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in N=4 super-Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B828:317–374, 2010.

[49] Andreas Brandhuber, Paul Heslop, and Gabriele Travaglini. A Note on dual superconformal symmetry of the N=4 super Yang-Mills S-matrix. *Phys. Rev.*, D78:125005, 2008.

[50] James M. Drummond, Johannes M. Henn, and Jan Plefka. Yangian symmetry of scattering amplitudes in N=4 super Yang-Mills theory. *JHEP*, 05:046, 2009.

[51] L. V. Bork and A. I. Onishchenko. On soft theorems and form factors in $\mathcal{N} = 4$ SYM theory. *JHEP*, 12:030, 2015.

[52] Rouven Frassek, David Meidinger, Dhritiman Nandan, and Matthias Wilhelm. On-shell diagrams, Graßmannians and integrability for form factors. *JHEP*, 01:182, 2016.

[53] L. V. Bork and A. I. Onishchenko. Grassmannian integral for general gauge invariant off-shell amplitudes in $\mathcal{N} = 4$ SYM. *JHEP*, 05:040, 2017.

[54] A. A. Rosly and K. G. Selivanov. On amplitudes in selfdual sector of Yang-Mills theory. *Phys. Lett.*, B399:135–140, 1997.

[55] A. A. Rosly and K. G. Selivanov. Gravitational SD perturbiner. 1997.

[56] Philipp Hähnel and Tristan McLoughlin. Conformal higher spin theory and twistor space actions. *J. Phys.*, A50(48):485401, 2017.

[57] Tim Adamo, Philipp Hähnel, and Tristan McLoughlin. Conformal higher spin scattering amplitudes from twistor space. *JHEP*, 04:021, 2017.

[58] M. A. Vasiliev. Multiparticle extension of the higher-spin algebra. *Class. Quant. Grav.*, 30:104006, 2013.

[59] Carlo Iazeolla and Joris Raeymaekers. On big crunch solutions in Prokushkin-Vasiliev theory. *JHEP*, 01:177, 2016.

[60] Carlo Iazeolla, Ergin Sezgin, and Per Sundell. On Exact Solutions and Perturbative Schemes in Higher Spin Theory. *Universe*, 4(1):5, 2018.

[61] V. E. Didenko and M. A. Vasiliev. Test of the local form of higher-spin equations via AdS/ CFT. *Phys. Lett.*, B775:352–360, 2017.

[62] Mikhail A. Vasiliev. Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory. *J. Phys.*, A46:214013, 2013.

[63] Dmitri Sorokin and Mirian Tsulaia. Higher Spin Fields in Hyperspace. A Review. *Universe*, 4(1):7, 2018.

[64] M.A. Vasil'ev. "gauge" form of description of massless fields with arbitrary spin. 32:3, 09 1980.

[65] Mikhail A. Vasiliev. Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the De Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra. *Fortsch. Phys.*, 35:741–770, 1987. [Yad. Fiz.45,1784(1987)].

[66] I. M. Gelfand and G. E. Shilov. *Generalized functions. Volume 1. Properties and operations.* Academic Press. New York and London, 1964.

[67] Paolo Benincasa and Freddy Cachazo. Consistency Conditions on the S-Matrix of Massless Particles. 2007.

[68] Nima Arkani-Hamed, Tzu-Chen Huang, and Yu-tin Huang. Scattering Amplitudes For All Masses and Spins. 2017.

[69] O. A. Gelfond and M. A. Vasiliev. Homotopy Operators and Locality Theorems in Higher-Spin Equations. 2018.

[70] Anders K. H. Bengtsson, Ingemar Bengtsson, and Lars Brink. Cubic Interaction Terms for Arbitrary Spin. *Nucl. Phys.*, B227:31–40, 1983.

[71] Anders K. H. Bengtsson, Ingemar Bengtsson, and Noah Linden. Interacting Higher Spin Gauge Fields on the Light Front. *Class. Quant. Grav.*, 4:1333, 1987.

[72] E. S. Fradkin and R. R. Metsaev. Cubic scattering amplitudes for all massless representations of the Poincare group in any space-time dimension. *Phys. Rev.*, D52:4660–4667, 1995.

[73] Paul Dempster and Mirian Tsulaia. On the Structure of Quartic Vertices for Massless Higher Spin Fields on Minkowski Background. *Nucl. Phys.*, B865:353–375, 2012.